Universitatea din Craiova
Facultatea de Științe
Departamentul de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XIV-a, etapa națională, Craiova, 04 aprilie 2026
Subiecte – anul I

subiectul **1** din **3**

I. În prezent, Luna se rotește în jurul Pământului pe o traiectorie aproximativ circulară cu raza medie $R = 3{,}85 \cdot 10^8$ m. Pentru această problemă se cunosc:

- constanta atracției gravitaționale $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$;
- masa Pământului $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

Interacțiunea Lunii cu alte corpuri cerești, în afară de Pământ, se neglijează.

a) (2 puncte) determină expresia matematică și calculează valoarea numerică a perioadei de rotație a Lunii în jurul axei proprii.

Măsurătorile arată că Luna de depărtează lent de Pământ cu o viteză radială medie $v_r = 3{,}8\ \mathrm{cm/an}$. Pentru durate mult mai mici decât un timp caracteristic τ, rapoartele $(t/\tau)^n$, unde $n > 1$, se pot neglija și astfel dependențele de timp ale mărimilor calculate se pot liniariza. În plus, pentru duratele de interes, viteza radială medie a Lunii se consideră constantă.

În aceste condiții, determină, în aproximația liniară a dependenței temporale:

b) (2 puncte) legea de variație în timp a vitezei unghiulare a Lunii ($\dot{\theta}$). Cu această ocazie, identifică timpul caracteristic τ, scrie-i expresia matematică și calculează valoarea sa numerică;

c) (1 punct) accelerația cu care crește distanța Pământ – Lună ($\ddot{r}$);

d) (1,5 puncte) accelerația unghiulară a Lunii ($\ddot{\theta}$); Calculează valoarea numerică actuală a accelerației unghiulare a Lunii (la $t = 0$).

Întrucât energia este o formă pătratică, în expresiile ei aproximative trebuie reținuți și termenii care conțin puterea a doua a timpului.

e) (2,5 puncte) Determină variația energiei totale a Lunii între un moment oarecare t și momentul actual ($t = 0$), în câmpul gravitațional al Pământului. Pentru această sarcină de lucru, se consideră cunoscută masa m a Lunii.

Obs.: *Dacă îți este utilă, poți folosi aproximația:* $(1 + x)^n \cong 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, *dacă* $|x| \ll 1$ *și* $n \in \mathbb{R}$. *La expresii care pot fi liniarizate, este suficientă doar forma liniară a formulei de aproximare de mai sus.*

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.

Subiecte – anul I

subiectul **2** din **3**

II. Pentru a participa la DH 2026, un student cazat în căminul 10 alege să ia autobuzul nr. 9 către Universitate. În drum spre stația de autobuz, își achiziționează 200 ml de cafea având densitatea $\rho = 1$ g/ml, ambalată într-un recipient cilindric fără capac, omogen și foarte subțire, de masă $m_r = 20\ g$, rază $Rc = 3{,}3$ cm și înălțime $H_c = 2R_c$. Odată suit în autobuz, studentul își așază cafeaua pe aparatul de validat biletele. De aici până la tragedie mai e doar un pas… al șoferului pe pedala de accelerație!

a) [2p] Considerând coeficientul de frecare dintre aparat și pahar $\mu = 0{,}44$, să se găsească accelerația minimă a_f a autobuzului astfel încât paharul să alunece de pe aparat. Cât timp i-ar lua autobuzului să atingă viteza de 100 km / h păstrând accelerația a_f constantă?

b) [3p] Presupunând că paharul stă pe loc, considerăm că suprafața liberă a cafelei se ajustează instantaneu la noua poziție de echilibru când autobuzul accelerează. Care este accelerația minimă a_{str} pentru care cafeaua iese din pahar (stropește)?

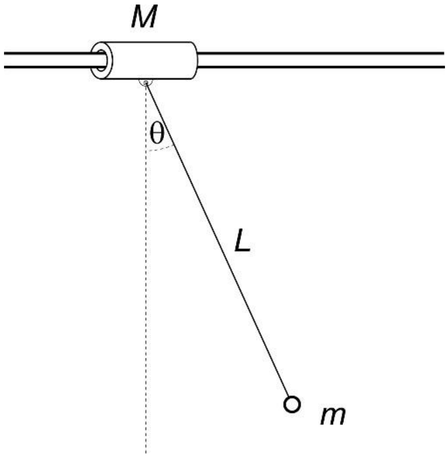
c) [4p] Presupunând că lichidul se mișcă solidar cu paharul, să se găsească valoarea accelerației a_{rot} pentru care paharul se răstoarnă.

Puteți considera valoarea $g = 10\ m/s^2$ pentru accelerația gravitațională. Se acordă un punct din oficiu.

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Științe
Departamentul de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XIV-a, etapa națională, Craiova, 04 aprilie 2026
Subiecte – anul I



III. Un inel de masă M poate aluneca fără frecare pe o tijă orizontală. De inel este atașat un corp de masă m, prin intermediul unei tije rigide de masă neglijabilă și lungime L, care se poate roti liber în planul vertical ce conține tija orizontală, în jurul articulației sale (vezi figura). Inițial tija de lungime L este în poziție orizontală (θ = 90˚), apoi este lăsată liberă.

a) (3p) Aflați coordonatele x și y ale corpului m precum și viteza acestuia, atunci când tija L ajunge în poziție verticală. Particularizați pentru $M = 2m$.
Originea sistemului de coordonate este în poziția inițială a lui M, cu axa x orientată înspre dreapta și axa y orientată vertical în jos.

b) (2p) Presupunând că $M = 2m$ reprezentați, folosind schița de mai sus, la scară, vitezele v, vx, vy și V ale corpurilor m și M la un moment dat (când M se deplasează spre dreapta iar θ diferit de 0˚ și 90˚) precum și proiecția vitezelor v și V pe direcția tijei.

c) (4p) Demonstrați că dependența de θ a vitezei corpului m este:
$v^2(\theta) = 2gL\cos(\theta)\left[1 + \frac{q^2}{1+(1+q)^2\tan^2\theta}\right]^{-1}$ unde $q = \frac{m}{M}$.

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.

În prezent, Luna se rotește în jurul Pământului pe o traiectorie aproximativ circulară cu raza medie $R = 3{,}85 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$. Pentru această problemă se cunosc:

- constanta atracției gravitaționale $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}$;
- masa Pământului $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

Interacțiunea Lunii cu alte corpuri cerești, în afară de Pământ, se neglijează.

a) **(2 puncte)** determină expresia matematică și calculează valoarea numerică a perioadei de rotație a Lunii în jurul axei proprii.

Măsurătorile arată că Luna de depărtează lent de Pământ cu o viteză radială medie $v_r = 3{,}8\ \mathrm{cm/an}$. Pentru durate mult mai mici decât un timp caracteristic τ, rapoartele $(t/\tau)^n$, unde $n > 1$, se pot neglija și astfel dependențele de timp ale mărimilor calculate se pot liniariza. În plus, pentru duratele de interes, viteză radială medie a Lunii se consideră constante.

În aceste condiții, determină, în aproximația liniară a dependenței temporale:

b) **(2 puncte)** legea de variație în timp a vitezei unghiulare a Lunii ($\dot{\theta}$). Cu această ocazie, identifică timpul caracteristic τ, scrie-i expresia matematică și calculează valoarea sa numerică;

c) **(1 punct)** accelerația cu care crește distanța Pământ – Lună ($\ddot{r}$);

d) **(1,5 puncte)** accelerația unghiulară a Lunii ($\ddot{\theta}$); Calculează valoarea numerică actuală a accelerației unghiulare a Lunii (la $t = 0$).

Întrucât energia este o formă pătratică, în expresiile ei aproximative trebuie reținuți și termenii care conțin puterea a doua a timpului.

e) **(2,5 puncte)** Determină variația energiei totale a Lunii între un moment oarecare t și momentul actual ($t = 0$), în câmpul gravitațional al Pământului. Pentru această sarcină de lucru, se consideră cunoscută masa m a Lunii.

Obs.: *Dacă îți este utilă, poți folosi aproximația:* $(1+x)^n \cong 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, *dacă* $|x| \ll 1$ *și* $n \in \mathbb{R}$. *La expresii care pot fi liniarizate, este suficientă doar forma liniară a formulei de aproximare de mai sus.*

Soluție:

a) Luna păstrează aceeași față spre Pământ, de unde
$$T_{rot} = T_{rev}.$$
Dar
$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R,$$
adică
$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$
sau
$$T_{rev} = \frac{2\pi}{\omega},$$
adică
$$\boxed{T_{rev} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{\gamma M}}}$$
având valoarea numerică
$$\boxed{T_{rot} = 2{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{s} \cong 27{,}5\ \mathrm{zile}}.$$
În plus, $\omega = 2{,}64 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$.

b) Cum forța gravitațională este singura forță care acționează asupra Lunii, atunci momentul cinetic al acesteia se conservă:
$$mR^2\omega = mr^2\dot{\theta}.$$
Cum
$$r = R + v_r t = R\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right),$$
atunci
$$\dot{\theta} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \omega = \omega\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right)^{-2},$$
sau
$$\boxed{\dot{\theta} \cong \omega\left(1 - 2\frac{v_r}{R}t\right)}.$$
Se observă de aici că viteza unghiulară de revoluție a Lunii scade foarte lent în timp, deoarece
$$\boxed{\tau = \frac{R}{v_r}},$$
având valoarea numerică
$$\boxed{\tau = 3{,}20 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}}.$$
c) Ecuația de mișcare a Lunii, pe direcția radială se scrie
$$m\left(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r\right) = -\gamma\frac{mM}{r^2},$$
de unde

$$\ddot{r} = \omega^2 \left(1 - 2\frac{v_r}{R}t\right)^2 R\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right) - \frac{\omega^2 R^3}{R^2}\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right)^{-2}$$
$$\cong \omega^2 R\left[\left(1 - 4\frac{v_r}{R}t\right)\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right) - \left(1 - 2\frac{v_r}{R}t\right)\right]$$
$$\cong \omega^2 R\left[\left(1 - 3\frac{v_r}{R}t\right) - \left(1 - 2\frac{v_r}{R}t\right)\right]$$

sau

$$\boxed{\ddot{r} = -\omega^2 v_r t}.$$

d) Derivând în raport cu timpul expresia

$$\dot{\theta} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \omega,$$

rezultă

$$\ddot{\theta} = -2\frac{R^2}{r^3}\omega\dot{r} = -2\frac{\omega}{R}\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right)^{-3} v_r \cong -2\frac{\omega v_r}{R}\left(1 - 3\frac{v_r}{R}t\right)$$

sau

$$\boxed{\ddot{\theta} = -2\frac{\omega v_r}{R}\left(1 - 3\frac{v_r}{R}t\right)}.$$

La acest moment,

$$\boxed{\ddot{\theta} = -2\frac{\omega v_r}{R}}$$

și are valoarea numerică

$$\boxed{\ddot{\theta} = -1{,}65 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{s}^{-2}}.$$

e) La momentul actual

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_t^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R} = \frac{mv_r^2}{2} - \gamma\frac{mM}{2R},$$

deoarece

$$\gamma\frac{mM}{R^2} = \frac{mv_t^2}{R}.$$

La un moment oarecare t,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r},$$

unde

$$v^2 = v_r^2 + \left(\dot{\theta}r\right)^2.$$

Așadar

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2\frac{R^4}{r^2} - \gamma\frac{mM}{r} =$$
$$= \frac{mv_r^2}{2} + \gamma\frac{mM}{2R}\left[\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right)^{-2} - 2\left(1 + \frac{v_r}{R}t\right)^{-1}\right]$$
$$\cong \frac{mv_r^2}{2} + \gamma\frac{mM}{2R}\left[\left(1 - 2\frac{v_r}{R}t + 3\frac{v_r^2}{R^2}t^2\right) - 2\left(1 - \frac{v_r}{R}t + \frac{v_r^2}{R^2}t^2\right)\right]$$

sau

$$E = \frac{mv_r^2}{2} - \gamma\frac{mM}{2R} + \gamma\frac{mM}{2R}\frac{v_r^2}{R^2}t^2.$$

În concluzie

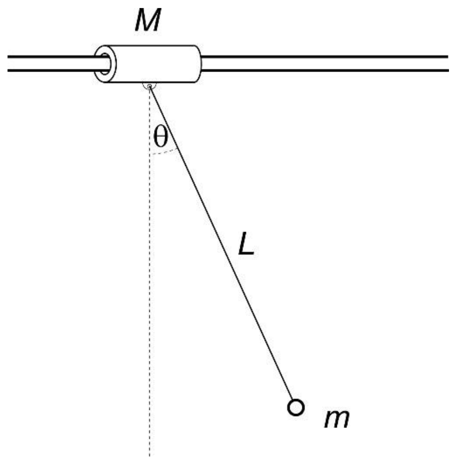
$$\boxed{\Delta E = \gamma \frac{mM}{2R}\frac{v_r^2}{R^2}t^2}.$$

BAREM CORECTARE

Nr.	Soluție	Punctaj
a)	Deoarece autobuzul accelerat constituie un sistem neinerțial, legea a doua a dinamicii pentru un corp de masă *m* asupra căruia acționează forțele reale ***F*** se modifică după cum urmează: $m a_r = F - m a$, unde ***a*** reprezintă accelerația autobuzului iar $\boldsymbol{a_r}$ reprezintă accelerația relativă a corpului față de autobuz.	**1p**
	Masa cafelei este $m_c = \rho_c V_c = 200$ g. Masa totală a ansamblului recipient-cafea este $M = m_c + m_r = 210$ g. Asupra corpului acționează greutatea ***G***, forța de reacție normală ***N*** și forța de frecare $\boldsymbol{F_f}$, unde $N = G = M g = 2{,}1$ *N*. Impunând Ff = μ N = 0,924 N și $a_r = 0$, rezultă accelerația maximă $a_f = 4{,}4$ m/s^2.	**0,5p**
	Timpul necesar pentru atingerea vitezei de 100 km/h la această viteză este: $\Delta t = \frac{100\,km/h}{a_f} = 6{,}31$ s.	**0,5p**
b)	Suprafața liberă de lichid este o suprafață echipotențială, fiind ortogonală pe rezultanta forței care acționează asupra lichidului. Așadar, unghiul α sub care se înclină suprafața lichidului satisface: $\tan\alpha = \frac{a}{g}$.	**1p**
	Împărțind volumul de lichid în porțiunea de înălțime h_0 până ce suprafața începe să se încline, respectiv porțiunea de înălțime *h'* unde suprafața e înclinată, volumul total de cafea va fi dat de $V_c = \pi R^2 \left(h_0 + \frac{h'}{2}\right)$. Impunând $V_c = 200\ ml$, de aici rezultă $h_0 + h'/2 = 5{,}8\ cm$.	**1p**
	Cafeaua se varsă când $h_0 + h' = H$, de unde rezultă $h'/2 = H - (h_0 + h'/2)$, adică $h' = 1{,}6\ cm$. Astfel putem găsi unghiul de înclinație, $\tan\alpha = \frac{h}{2R} = 0{,}24$. Drept urmare, cafeaua se varsă când $a = 0{,}24\ g = 2{,}4\ m/s^2$.	**1p**
c)	În momentul când paharul începe să se răstoarne, acesta păstrează contactul cu aparatul de validat bilete doar în colțul din stânga jos. Considerăm un reper având originea în acest punct, axa *x* în sensul de mers (spre dreapta), axa *y* orientată în sus și axa *z* ieșind din pagină. Pentru ca recipientul să se răstoarne, momentul forțelor care acționează asupra paharului, față de punctul fix (originea O), trebuie să fie pe direcția pozitivă a axei *z*. Deoarece forța de reacție normală va acționa în punctul *O*, momentul acesteia este nul. Așadar, $\boldsymbol{M}_{total} = \boldsymbol{R}_{cm} \times M\,\boldsymbol{a}_{ef}$, $\boldsymbol{a}_{ef} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$.	**1p**
	Accelerația a_{rot} când paharul începe să se răstoarne se obține când $\boldsymbol{R}_{cm}$ și $\boldsymbol{a}_{ef}$ sunt vectori paraleli. Așadar, trebuie să rezolvăm ecuația $\tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{R}{h_{cm}}$.	**1p**
	Centrul de masă al cafelei se găsește la înălțimea $h_{cm;c} = \frac{V_{cm}}{2\pi R^2} = 2{,}9\,cm$.	

	Centrul de masă al recipientului (fără cafea) se găsește la $h_{cm;r} = \frac{2\pi R H \times (H/2)}{2\pi R H + \pi R^2} = \frac{4}{5} R = 2{,}6\, cm.$ Centrul de masă al sistemului recipient-cafea are înălțimea $h_{cm} = \frac{m_c h_{cm;c} + m_r h_{cm;r}}{m_c + m_r} = 2{,}9\, cm.$	**1p**
	Așadar, accelerația la care paharul se răstoarnă este $a = \frac{R}{h_{cm}} g = 1{,}1\, g = 11\, m/s^2.$	**1p**
Oficiu	1 punct se acordă din oficiu	**1p**
Total Subiect		**10p**

Concursul Național Dragomir Hurmuzescu
Mecanică



Un inel de masă *M* poate aluneca fără frecare pe o tijă orizontală. De inel este atașat un corp de masă *m*, prin intermediul unei tije rigide de masă neglijabilă și lungime *L*, care se poate roti liber în planul vertical ce conține tija orizontală, în jurul articulației sale (vezi figura). Inițial tija de lungime *L* este în poziție orizontală (θ = 90˚), apoi este lăsată liberă.

a) Aflați **coordonatele** *x* și *y* ale **corpului *m*** precum **și viteza acestuia**, atunci când tija L ajunge în poziție verticală. Particularizați pentru $M = 2m$.
Originea sistemului de coordonate este în poziția inițială a lui *M*, cu axa *x* orientată înspre dreapta și axa y orientată vertical în jos.

b) Presupunând că $M = 2m$ reprezentați, folosind schița de mai sus, la scară, vitezele *v*, v_x, v_y și *V* ale corpurilor *m* și *M* la un moment dat (când *M* se deplasează spre dreapta iar θ diferit de 0˚ și 90˚) precum și proiecția vitezelor *v* și *V* pe direcția tijei.

c) Demonstrați că dependența de θ a vitezei corpului *m* este:
$v^2(\theta) = 2gL\cos(\theta)\left[1 + \frac{q}{1+(1+q)^2\tan^2\theta}\right]^{-1}$ unde $q = \frac{m}{M}$.

Barem

a) [3 p]

Pe direcția *x* nu avem forțe, impulsul se conservă. Impulsul inițial e 0, viteza CM e zero. **(0.5 p)**

Când tija e în poziție verticală, M și m se află pe verticala CM deci $x = x_{cm}$

adică $x = \frac{M\cdot 0+mL}{M+m}$ deci $x = \frac{L}{3}$ **(0.5 p)**

$y = L.$ **(0.5 p)**

Din conservare de energie:

$0 = -mgL + \frac{p_M^2}{2M} + \frac{p_m^2}{2m}.$ **(0.5 p)**

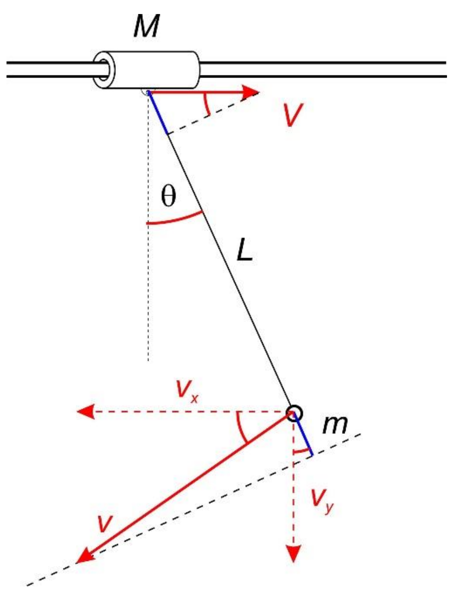
Din conservarea impulsului pe direcția x: $p_m = -p_M,$ **(0.5 p)**

de unde:

$mgL = \frac{m^2v^2}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$ unde cu *v* am notat viteza lui m. $mgL = \frac{m^2v^2}{2}\frac{M+m}{Mm}$ de unde

$v^2 = 2gL\frac{M}{M+m}$ de unde rezultă $v = 2\sqrt{\frac{gL}{3}}$ **(0.5 p)**

b) [2 p]



- vezi desen, v_x trebuie să fie 2V **(1 p) ;**

v să nu fie perpendicular pe tija L **(0.5 p)**

iar proiecțiile lui V și v pe tija L să fie egale **(0.5 p)**

c) [4p]

Conservarea impulsului pe direcția *x*, vezi figura de mai jos:

$\vec{0} = M\vec{V} + m\overrightarrow{v_x}$ adică, $MV - mv_x = 0$. $V = qv_x$ **(1 p)** (1)

Conservarea energiei:

$0 = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - mgLcos(\theta)$ **(1 p)** (2)

Tija este rigidă, ceea ce înseamnă că proiecția vitezelor lui *M* și a lui *m*, pe direcția tijei, sunt aceleași.

Din desen:

$V\sin\theta = v_y cos\theta - v_x\sin\theta$ **(1 p)** (3)

Din (1) și (3):

$v_y = v_x(1+q)\tan\theta$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2[1+(1+q)^2\tan^2\theta]$

De unde

$V^2 = q^2 v_x^2 = \frac{q^2}{1+(1+q)^2\tan^2\theta} v^2$ **(0.5 p)**

Înlocuind în (2):

$v^2(\theta) = 2gL\cos(\theta)\left[1+\frac{q}{1+(1+q)^2\tan^2\theta}\right]^{-1}$ **(0.5 p)**