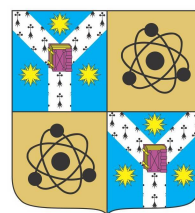


Universitatea „Alexandru Ioan Cuza”
din Iași
Facultatea de Fizică
Iași, România



FIZICA GĂURILOR NEGRE CU CHINTESENȚĂ

Rezumatul tezei de doctorat

drd. Vitalie LUNGU

Conducător de doctorat
Prof. univ. dr. Marina-Aura DARIESCU

Iași, 2026

Comisia de doctorat:

Președinte:

Prof. univ. dr. Diana Mihaela Mardare

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași, Facultatea de Fizică

Conducător științific:

Prof. univ. dr. Marina-Aura Dariescu

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași, Facultatea de Fizică

Referenți:

Prof. univ. dr. Irina Radinschi

Universitatea Tehnică “Gheorghe Asachi” din Iași

Conf. univ. dr. Cosmin Crucean

Universitatea de Vest Timișoara

Conf. univ. dr. Mircea-Claudiu Crâșmăreanu

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

Mulțumiri

Realizarea acestei teze de doctorat reprezintă rezultatul unui parcurs academic complex, în cadrul căruia am beneficiat de sprijinul și contribuția multor persoane, cărora doresc să le adresez profunda mea recunoștință.

În primul rând, doresc să-i mulțumesc conducătorului meu de doctorat, prof. univ. dr. Marina-Aura Dariescu, pentru îndrumarea științifică atentă, pentru disponibilitatea permanentă de a discuta ideile și rezultatele obținute, precum și pentru observațiile și sugestiile valoroase care au contribuit în mod decisiv la dezvoltarea acestei lucrări. Rigoarea științifică, experiența și profesionalismul dumneaei au reprezentat o sursă constantă de inspirație pe parcursul anilor de doctorat.

Mulțumesc membrilor comisiei de îndrumare, prof. univ. dr. habil. Laurențiu Stoleriu, conf. univ. dr. habil. Iordana Aștefănoaei și, nu în ultimul rând, C.S. III dr. Cristian-Ionuț Stelea, pentru îndrumarea constantă și clarificarea unor aspecte importante ale cercetării, precum și pentru comentariile și recomandările constructive care au contribuit la îmbunătățirea conținutului prezentei teze.

De asemenea, doresc să îmi exprim recunoștința față de profesorii care au contribuit la formarea mea academică de-a lungul anilor de studiu. Cunoștințele și experiența împărtășite de aceștia au avut un rol esențial în dezvoltarea interesului meu pentru cercetare în domeniul fizicii teoretice.

Mulțumiri speciale se îndreaptă și către profesoara mea de fizică din liceu, prof. Mioara Șaramet, care a contribuit la dezvoltarea pasiunii mele pentru fizică.

Nu în ultimul rând, doresc să adresez cele mai sincere mulțumiri familiei și prietenilor mei pentru susținerea morală constantă, pentru încrederea și răbdarea de care au dat dovadă pe parcursul acestei perioade. Sprijinul lor necondiționat a fost esențial pentru depășirea dificultăților și pentru menținerea motivației necesare finalizării acestei etape importante din parcursul meu profesional.

În final, mulțumesc tuturor celor care, direct sau indirect, au contribuit la realizarea acestei teze și la parcursul meu academic.

Cuprinsul tezei

Introducere	15
1 Mișcarea particulelor în spațiul-timp al unei găuri negre în electrodinamica neliniară de tip power–Maxwell	19
1.1 Soluția Kiselev	19
1.2 Soluția Kiselev reobținută în electrodinamica neliniară de tip power–Maxwell	22
1.2.1 Ansatz-ul electric	23
1.2.2 Ansatz-ul magnetic	24
1.3 Dinamica particulelor neutre în spațiu-timpul unei găuri negre de tip power-Maxwell	25
1.3.1 Ecuatiile de mișcare și potențialul efectiv	25
1.3.2 Orbitele circulare	27
1.4 Mișcarea fotonilor	29
1.4.1 Ecuatiile de mișcare și potențialul efectiv	29
1.4.2 Orbitele circulare ale fotonilor	30
1.4.3 Soluțiile analitice	31
1.5 Mișcarea particulelor încărcate în jurul găurii negre încărcate electric	32
1.5.1 Ecuatiile de mișcare și potențialul efectiv	32
1.5.2 Orbitele circulare	34
1.5.3 Exemple de traiectorii	35
1.6 Mișcarea particulelor încărcate în cazul magnetic	37
1.6.1 Mișcarea polară	37
1.6.2 Mișcarea radială	39
1.6.3 Soluțiile analitice ale ecuațiilor de mișcare	43
1.6.4 Conurile Poincaré și exemple de traiectorii	45
1.7 Proprietățile termodinamice ale găurii negre	47
1.8 Concluzii la capitolul 1	50
2 Gaura neagră încărcată electric și scufundată în chintesență	53
2.1 Gaura neagră înconjurată de un halou întunecat	53
2.2 Generalizarea soluției pentru gaura neagră încărcată electric	54
2.3 Ecuatiile de mișcare și potențialul efectiv	56
2.3.1 Exemple de traiectorii	61
2.3.2 Particule încărcate cu moment cinetic nul	62
2.4 Orbitele circulare	66
2.5 Avansul de periastru	66
2.5.1 Formula generală a avansului de periastru pentru metricile sferic-simetrice	66
2.5.2 Avansul de periastru pentru metrica Schwarzschild	67
2.5.3 Avansul de periastru în geometria Kiselev	68
2.5.4 Avansul periastrului în geometria Reissner–Nordström	70
2.5.5 Avansul periastrului pentru particulele neutre în jurul unei găuri negre încărcate electric și scufundate în chintesență	71

2.5.6	Avansul periastrului pentru particule încărcate în jurul găurii negre încărcate electric și scufundate în chintesență	73
2.6	Mișcarea fotonilor și umbra găurii negre	74
2.7	Concluzii la capitolul 2	77
3	Gaura neagră înconjurată de câmp magnetic și chintesență	79
3.1	Metrica găurii negre Kiselev magnetizate	80
3.2	Mișcarea particulelor încărcate în jurul găurii negre Kiselev magnetizate	82
3.2.1	Ecuatiile de mișcare	82
3.2.2	Potențialul efectiv	83
3.2.3	Clasificarea orbitelor	87
3.3	Orbitele în planul ecuatorial	90
3.3.1	Ecuatiile de mișcare și potențialul efectiv	90
3.3.2	Tipuri de traiectorii	91
3.3.3	Orbitele circulare	94
3.4	Frecvențele epicyclice ale orbitelor cvasi-circulare	97
3.5	Universul magnetic Melvin	101
3.6	Abordarea euristică în aproximația câmpului magnetic slab	103
3.6.1	Ecuatiile de mișcare în cazul unui câmp magnetic slab	103
3.6.2	Mișcarea în planul ecuatorial	104
3.6.3	Mișcarea tridimensională	108
3.7	Geodezicele nule. Efectul de lentilă gravitațională	112
3.8	Concluzii la capitolul 3	115
4	Găuri negre în rotație scufundate în chintesență	117
4.1	Soluții consacrate pentru găuri negre în rotație	117
4.1.1	Soluția Kerr	117
4.1.2	Soluția Kerr–Newman	118
4.1.3	Metrica Kerr–Newman–anti–de Sitter	119
4.2	Gaura neagră Kerr înconjurată de chintesență	120
4.2.1	Geometria găurii negre Kerr înconjurată de chintesență	120
4.2.2	Structura orizonturilor	122
4.2.3	Structura ergosferei	125
4.3	Ecuatiile geodezice	126
4.3.1	Separabilitatea ecuațiilor de mișcare	126
4.3.2	Mișcarea radială	129
4.3.3	Mișcarea polară	133
4.4	Potențialul efectiv și tipuri de traiectorii	134
4.5	Orbitele sferice	138
4.5.1	Intervalele fizice ale parametrilor a , k și L_z	139
4.5.2	Stabilitatea orbitelor sferice	141
4.5.3	Soluțiile analitice ale ecuațiilor de mișcare pentru orbitele sferice	144
4.5.4	Exemple de traiectorii sferice	147
4.6	Concluzii la capitolul 4	149
	Concluzii generale	151
	Bibliografie	153
	Contribuțiile proprii pe domeniul tezei	163

Introducere

Studiul găurilor negre are un rol important atât în fizica teoretică, cât și în astrofizică, fiind susținut de progrese observaționale remarcabile, precum detectarea undelor gravitaționale, în 2015 [1], și obținerea primei imagini a umbrei unei găuri negre, în 2019 [2]. Aceste realizări experimentale confirmă existența găurilor negre ca obiecte astrofizice reale și oferă un cadru fără precedent pentru testarea relativității generale. Importanța lor este amplificată de rolul pe care îl joacă în evoluția galaxiilor [3], în dinamica sistemelor binare compacte [4], precum și în studiul proceselor de acreție și al emisiei de radiație [5].

Energia întunecată și chintesența. Expansiunea Universului este susținută observațional de legea lui Hubble, conform căreia galaxiile se îndepărtează unele de altele cu viteze proporționale cu distanța dintre ele [6]. Observațiile asupra supernovelor de tip Ia [7] și asupra radiației cosmice de fond [8], precum și măsurătorile furnizate de telescopul spațial *Hubble* au evidențiat că expansiunea Universului este accelerată. Acest fapt a condus la introducerea conceptului de *energie întunecată*, caracterizată de o presiune negativă. Un model de energie întunecată îl reprezintă *chintesența* [9], care a fost modelată ca un câmp scalar cuplat minimal la gravitație și caracterizat de un potențial ce variază în timp. Evoluția câmpului scalar determină expansiunea accelerată a Universului, iar comportamentul acestuia diferă la scări galactice și cosmologice datorită variației parametrului de stare w [10]. În acest context, Kiselev [11] a obținut o soluție statică a ecuațiilor Einstein care descrie o gaură neagră înconjurată de un fluid anizotrop de tip chintesență, cu parametrul de stare în intervalul $w \in [-1, -1/3]$.

Proprietăți orbitale și observabile asociate găurilor negre. În studiul mișcării particulelor și al proceselor de acreție în jurul găurilor negre, un rol fundamental îl joacă proprietățile orbitelor legate. Stabilitatea orbitelor circulare poate fi analizată prin studiul oscilațiilor cvasi-armonice, descrise prin frecvențele epiciclice. Acestea au un rol important în interpretarea fenomenelor astrofizice observate, cum ar fi oscilațiile cvasi-periodice (QPO, *quasi-periodic oscillations*) detectate în discurile de acreție din jurul găurilor negre [12].

Un alt aspect observabil important al găurilor negre îl constituie umbra acestora (*shadow*). Forma și dimensiunea umbrei depind de proprietățile spațiului-timp din vecinătatea găurii negre și pot furniza informații valoroase despre masa, parametrul de spin și eventualele câmpuri suplimentare prezente în jurul acesteia [13]. Observațiile realizate de colaborarea *Event Horizon Telescope* au oferit pentru prima dată imagini directe ale umbrei găurilor negre supermasive, deschizând o nouă perspectivă pentru testarea teoriei relativității generale [2].

Obiectivele și structura tezei. Scopul principal al tezei este de a analiza soluții exacte ale ecuațiilor Einstein ce caracterizează găurile negre scufundate în chintesență, inclusiv în prezența câmpurilor electrice sau magnetice externe. O importanță deosebită se acordă mișcării particulelor-test încărcate sau neutre pe astfel de varietăți spațio-temporale.

Fiecare capitol se bazează pe articole proprii publicate în reviste cotate ISI și se încheie cu o secțiune de concluzii în care sunt subliniate rezultatele originale.

1. Mișcarea particulelor în spațiul-timp al unei găuri negre în electrodinamica neliniară de tip power–Maxwell

În acest capitol, este analizat un model simplu de gaură neagră cu simetrie sferică înconjurată de chintesență. O metrică pentru acest spațiu-timp a fost propusă pentru prima dată de Kiselev [11], sursa acestei geometrii fiind un fluid anizotrop. Soluția Kiselev este reobținută în cadrul electrodinamicii neliniare ca soluție exactă a ecuațiilor Einstein cuplate la electrodinamica neliniară de tip power–Maxwell. Prin utilizarea unui ansatz electric sau a unui magnetic, se studiază mișcarea particulelor neutre și a celor încărcate. De asemenea, este discutată stabilitatea termodinamică a găurii negre de tip power–Maxwell. Aceste investigații constituie subiectul lucrărilor [14, 15].

1.1. Soluția Kiselev

În lucrarea de referință [11], Kiselev a propus o soluție statică, cu simetrie sferică, a ecuațiilor Einstein, care descrie spațiul-timp al unei găuri negre înconjurată de chintesență. Geometria este generată de un fluid anizotrop și este descrisă de elementul de linie

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

unde funcția metrică are forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{k}{r^{3w+1}}. \quad (2)$$

Aici, M este masa găurii negre, w este parametrul ecuației de stare $p_0 = w\rho$, iar k este parametrul care caracterizează densitatea chintesenței. Pentru expansiunea accelerată a Universului se impune intervalul $w \in [-1, -1/3]$. Fluidul care susține această geometrie este anizotrop: presiunea radială este $p_r = -\rho$, presiunile tangențiale sunt egale, $p_t = p_\theta = p_\varphi$, iar presiunea efectivă este media acestora. Un caz important este cel corespunzător parametrului $w = -2/3$, pentru care funcția metrică capătă forma simplificată

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - kr. \quad (3)$$

Orizonturile se obțin din condiția $f(r) = 0$ și au expresiile

$$r_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 8kM}}{2k}, \quad r_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 8kM}}{2k}, \quad (4)$$

unde $8kM < 1$. Prima soluție, r_- , corespunde orizontului găurii negre, iar a doua, r_+ , este un orizont cosmologic, regiunea fizică fiind cuprinsă între cele două orizonturi, $r \in [r_-, r_+]$. În limita $M = 0$, orizontul găurii negre dispăre, dar rămâne un orizont cosmologic situat la $r_+ = 1/k$.

1.2. Soluția Kiselev reobținută în electrodinamica neliniară de tip power–Maxwell

Soluția Kiselev poate fi reobținută în cadrul electrodinamicii neliniare de tip power–Maxwell. Prezentăm doar rezultatele principale, teoria fiind dezvoltată în lucrarea [14]. În această abordare, acțiunea este dată de expresia [16]

$$I = -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{-g} (R - \alpha F^q) - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{V}} d^3x \sqrt{-\gamma} K + I_{bd}, \quad (5)$$

unde $F = F_{ij}F^{ij}$, K este termenul Gibbons–Hawking definit pe frontiera spațiului-timp $\partial\mathcal{V}$, iar I_{bd} este termenul de frontieră introdus pentru a face acțiunea finită. Ecuațiile de câmp obținute din acțiunea (5) sunt

$$G_{ij} = T_{ij}, \quad \partial_i (\sqrt{-g} F^{ij} F^{q-1}) = 0 \quad (6)$$

iar tensorul energie-impuls asociat câmpului electromagnetic neliniar are forma

$$T_{ij} = 2\alpha \left[q F_{ip} F_j^p F^{q-1} - \frac{1}{4} g_{ij} F^q \right]. \quad (7)$$

În acest context, a fost obținută o geometrie statică de tip Kiselev, cu simetrie sferică, caracterizată de funcția metrică

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - kr^p. \quad (8)$$

Parametrul $k > 0$ joacă rolul parametrului de chintesență din soluția Kiselev, iar exponentul p este legat de parametrul ecuației de stare prin relația $p = -(3w + 1)$. Prin urmare, pentru $w \in [-1, -1/3]$, rezultă intervalul $p \in [0, 2]$.

Ansatz-ul electric

Ca sursă a geometriei, se consideră un câmp electric neliniar, descris de potențialul vector cu singura componentă nenulă

$$A_0 = \chi(r). \quad (9)$$

Tensorul Maxwell se obține din relația $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, iar invariantul electromagnetic are forma $F = -2 (d\chi/dr)^2 < 0$. Ecuațiile (6) sunt satisfăcute de soluția [14]

$$\chi(r) = C_1 + C_2 r^{p+1}, \quad (10)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare. Parametrul de chintesență k poate fi scris în funcție de sarcina electrică Q_e sub forma

$$k = \frac{2^{\frac{2-p}{4}} Q_e^{\frac{2-p}{2}}}{p(p+1)}. \quad (11)$$

Ansatz-ul magnetic

Aceeași funcție metrică (8) poate fi obținută și printr-un ansatz de monopol magnetic [14, 15]. În acest caz, câmpul electromagnetic este descris de potențialul vector

$$A_i = (0, 0, 0, Q_m(1 - \cos \theta)), \quad (12)$$

unde Q_m este sarcina magnetică a găurii negre. Ecuatiile neliniare ale lui Maxwell (6) sunt satisfăcute, relația dintre parametrul de chintesență k și sarcina magnetică Q_m fiind

$$k = \frac{(2Q_m^2)^{\frac{2-p}{4}}}{2(p+1)}. \quad (13)$$

1.3. Mișcarea particulelor încărcate în jurul găurii negre încărcate electric

Sursa geometriei este o gaură neagră încărcată electric, cu sarcină Q_e [15]. Particulele încărcate sunt caracterizate de sarcina specifică $\varepsilon = q/m$, unde q este sarcina electrică, iar m este masa particulei. Spre deosebire de soluția originală Kiselev, aici sarcina electrică a particulei influențează traiectoria prin cuplajul cu potențialul electromagnetic neliniar. Pentru studierea diferitelor tipuri de traiectorii, se definește potențialul efectiv, care are expresia

$$V_{\pm} = C_1\varepsilon + C_2\varepsilon r^2 \pm \sqrt{f \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right)} \quad (14)$$

iar, pentru existența orbitelor fizice, se alege potențialul $V = V_+$. Din condițiile $V = E$ și $V' = 0$ rezultă expresia momentului cinetic

$$L_{\pm}^2 = \frac{[8\beta^2 f r^3 - f'(f'r - 2f)] r^5 \pm 4\sqrt{2}\beta f \sqrt{2\beta^2 r^4 - f'r + 2f}}{r^2(f'r - 2f)^2}, \quad (15)$$

unde $\beta = \varepsilon C_2$. Cele două ramuri, L_+^2 și L_-^2 , descriu orbitele circulare posibile ale particulelor încărcate în prezența câmpului electromagnetic neliniar.

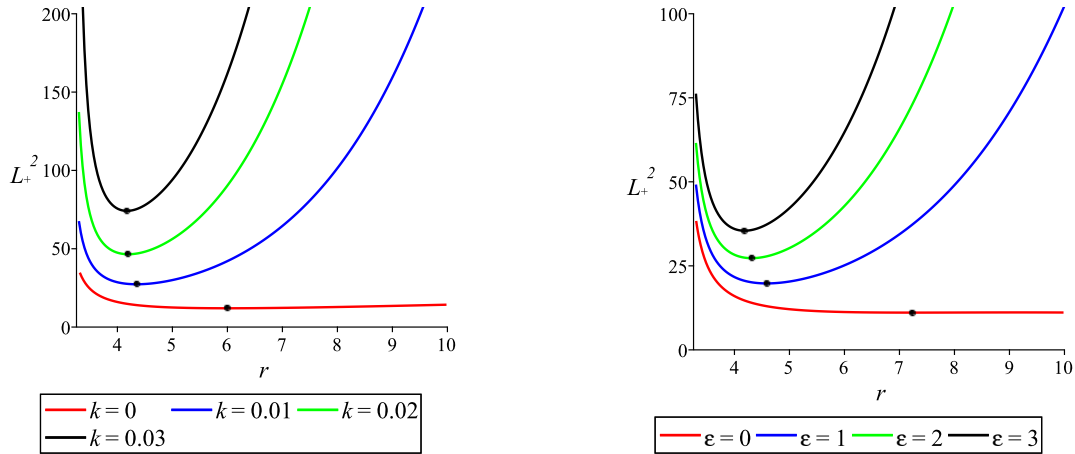


Figura 1: *Stânga*. Momentul cinetic L_+^2 pentru diferite valori ale lui k și $\varepsilon = 1$. *Dreapta*. Momentul cinetic L_+^2 pentru diferite valori ale lui ε și $k = 0.005$. Razele corespunzătoare ISCO sunt reprezentate de punctele de culoare neagră. S-a considerat valoarea $M = 1$.

În figura 1 este reprezentat momentul cinetic L_+^2 pentru diverse valori ale parametrului k (panoul din stânga) și ale sarcinii specifice ε (panoul din dreapta). Raza primei orbite circulare stabile, r_{ISCO} (*innermost stable circular orbit*), scade atunci când parametrul de chintesență crește. În același timp, valoarea minimă a momentului cinetic necesar pentru o orbită circulară

stabilă crește, ceea ce arată că particula are nevoie de un moment cinetic mai mare pentru a rămâne pe o orbită stabilă la raze mai mici. Panoul din dreapta arată că, pentru k fix, creșterea sarcinii specifice ε produce un efect asemănător: curbele L_+^2 se ridică, iar minimumul lor se deplasează spre valori mai mici ale razei. Rezultă că r_{ISCO} scade odată cu creșterea sarcinii particulei. Acest comportament reflectă modificarea echilibrului dintre contribuția gravitațională și cea electromagnetică, care influențează condițiile de stabilitate ale orbitelor circulare.

1.4. Mișcarea particulelor încărcate în cazul magnetic

Geometria Kiselev poate fi obținută și folosind un ansatz magnetic. În acest caz, se consideră o gaură neagră de tip power-Maxwell cu sarcină de monopol magnetic Q_m [15]. Pentru cazul particular $p = 1$, funcția metrică este cea din (3). Spre deosebire de cazul electric, ansatz-ul magnetic $A_\varphi = Q_m(1 - \cos \theta)$ cuplează direct mișcarea azimutală cu mișcarea polară. De aceea, dinamica particulelor încărcate trebuie analizată atât în direcția radială, cât și în direcția polară [17]. Introducând timpul Mino [18] γ , definit prin $r^2 d\gamma = d\tau$, ecuațiile de mișcare au forma [15]

$$\frac{dt}{d\gamma} = r^2 \frac{E}{f}, \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi}{d\gamma} = \frac{1}{\sin^2 \theta} [L + \varepsilon Q_m(1 - \cos \theta)], \quad (17)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\gamma}\right)^2 = K - \frac{[L + \varepsilon Q_m(1 - \cos \theta)]^2}{\sin^2 \theta}, \quad (18)$$

$$\left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2 = r^4 \left[E^2 - f \left(1 + \frac{K}{r^2} \right) \right] \quad (19)$$

unde f are expresia (3), iar K este constanta Carter [19].

Mișcarea polară

Intervalele permise de mișcare în direcția polară sunt reprezentate în figura 2. Zona cian corespunde mișcării în emisfera sudică, zona galbenă mișcării în emisfera nordică, iar zona gri descrie traiectorii care traversează planul ecuatorial.

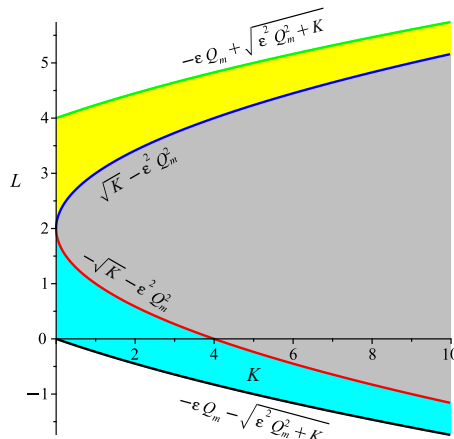


Figura 2: Reprezentarea momentului cinetic L în funcție de constanta Carter K pentru $\varepsilon = 1$ și $Q_m = -2$.

Mișcarea particulei are loc într-un con cu deschiderea $\theta = \text{ArcCos}(\alpha)$ situat în jurul axei definite de $\theta = 0, \pi$. În cele trei cazuri enumerate mai sus, unghiul de deschidere al conului este constant.

Mișcarea radială

Ecuția radială (19) poate fi scrisă sub forma

$$\left(\frac{dr}{d\gamma}\right)^2 = rR(r), \quad (20)$$

unde

$$R(r) = kr^4 + (E^2 - 1)r^3 + (Kk + 1)r^2 - Kr + K \geq 0 \quad (21)$$

și, pentru simplitate, s-a luat $M = 1$. Pentru $E^2 > 1$, polinomul (21) admite cel mult o rădăcină reală, corespunzând orbitelor de captare sau de evadare. Pentru $E^2 < 1$, pot apărea până la patru rădăcini reale, ceea ce permite existența orbitelor legate. Orbitale circulare apar atunci când polinomul radial are o rădăcină dublă, adică $R(r_0) = 0$ și $R'(r_0) = 0$. Aceste condiții conduc la domeniul permis pentru raza orbitelor circulare:

$$r_0 \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 3k}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (22)$$

Stabilitatea orbitelor circulare este determinată de semnul derivatei a doua a polinomului radial. Orbitale marginal stabile se obțin din condiția $R''(r_0) = 0$. Rădăcinile acestui polinom determină razele orbitelor critice ISCO și OSCO. Pentru $k = 0$ se recuperează cazul Schwarzschild, cu $r_0 = 3$. Cele două orbite critice coincid pentru $r_* = 4$ și $k_* = 0.0107$, astfel încât pentru $k > k_*$ nu mai există orbite circulare stabile. Pentru valori mici ale parametrului k , razele orbitelor marginal stabile pot fi approximate prin relațiile

$$r_{ISCO} \approx 3 + 27k + 1134k^2 + 63423k^3, \quad (23)$$

respectiv

$$r_{OSCO} \approx \frac{1}{\sqrt{3k}} - \frac{4}{9} - \frac{104\sqrt{3k}}{81} - \frac{3104k}{243}. \quad (24)$$

Parametrul de chintesență restrânge domeniul orbitelor stabile și introduce o limită exterioară pentru mișcarea legată.

Conurile Poincaré și exemple de traiectorii

Prezența monopolului magnetic face ca mișcarea particulei încărcate să nu mai fie restrânsă la un plan. În acest caz, traiectoria are loc pe un con Poincaré [20], a cărui deschidere ζ are expresia

$$\zeta = \arctan\left(\frac{L}{\varepsilon Q_m}\right).$$

Unghiul dintre direcția momentului cinetic total $\vec{J}$ și axa Oz este dat de relația

$$\cos \delta = \frac{J_z}{J} = \frac{J_z}{\sqrt{L^2 + \varepsilon^2 Q_m^2}}.$$

Astfel, efectul monopolului magnetic este de a transforma mișcarea plană obișnuită într-o mișcare conică, controlată de momentul cinetic total și de cuplajul electromagnetic εQ_m .

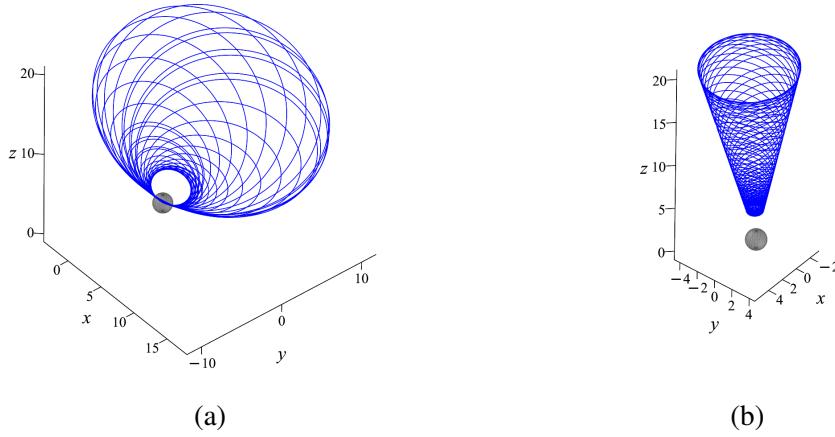


Figura 3: Traiectorii legate. Valorile numerice ale parametrilor sunt: Figura (a): $2M = 1$, $K = 4$, $k = 0.001$, $E = 0.94$, $\varepsilon = 3$, $Q_m = 1$, $L = 0.3$. Figura (b): $2M = 1$, $K = 4$, $k = 0.001$, $E = 0.94$, $\varepsilon = 9$, $Q_m = 1$, $L = -5$.

Din figura 3, în care sunt reprezentate exemple de traiectorii legate, se observă că sarcina particulei și momentul cinetic au o influență puternică asupra unghiului de deschidere al conului. Sfera de culoare gri reprezintă orizontul găurii negre.

1.5. Proprietățile termodinamice ale găurii negre

În cadrul electrodinamicii neliniare de tip power–Maxwell, proprietățile termodinamice ale găurii negre pot fi analizate atât pentru ansatz-ul electric, cât și pentru cel magnetic, obținându-se rezultate similare [14]. Astfel, în cazul electric, temperatura găurii negre se obține din gravitația superficială definită prin $\kappa_{\pm}^2 = -\frac{1}{2}\nabla_i \xi_j \nabla^i \xi^j$, unde $\xi^i = \partial_t$ este vectorul Killing asociat simetriei temporale. Pentru metrica analizată, temperatura Hawking la orizontul găurii negre este dată de expresia

$$T_- = \frac{\kappa_-}{2\pi} = \frac{f'(r_-)}{4\pi} = \frac{p - 2^{\frac{2-p}{4}} Q_e^{\frac{2-p}{2}} r_-^p}{4\pi p r_-}. \quad (25)$$

Pentru valori mici ale lui r_- , se recuperează comportamentul Schwarzschild, $T_- = 1/(4\pi r_-)$. Temperatura orizontului cosmologic se definește cu semn opus,

$$T_+ = -\frac{\kappa_+}{2\pi} = -\frac{f'(r_+)}{4\pi},$$

deoarece gravitația superficială asociată acestui orizont este negativă. Analiza evidențiază că prima lege a termodinamicii și relația lui Smarr sunt satisfăcute.

1.6. Concluzii la capitolul 1

Chintesența reprezintă un model viabil pentru energia întunecată, iar soluția Kiselev a căpătat o atenție deosebită în ultimii ani. În analiza noastră [14], soluția dedusă de Kiselev a fost regăsită în cadrul electrodinamicii neliniare. Mai exact, metrica Kiselev este o soluție a ecuațiilor Einstein cuplate la electrodinamica neliniară de tip power-Maxwell. Interesant este faptul că se obține aceeași soluție folosind atât un ansatz electric, cât și unul magnetic.

În acest capitol, s-a studiat mișcarea particulelor neutre și a celor încărcate electric în spațiul-timp al găurii negre de tip power-Maxwell. Ecuațiile de mișcare sunt studiate detaliat atât în cazul unei găuri negre încărcate electric, cât și în cazul uneia încărcate magnetic, punându-se în evidență efectul chintesenței [15]. O atenție deosebită este acordată cazului în care gaura neagră posedă o sarcină magnetică de tip monopol. Spre deosebire de cazul electric, aici mișcarea nu mai este într-un plan, ci se desfășoară pe un con Poincaré [21], al cărui unghi de deschidere depinde de sarcina efectivă a particulei-test ε și de sarcina găurii negre Q_m , aceasta fiind direct legată de parametrul de chintesență k . Din analiza efectuată rezultă modul în care parametrul k modifică poziția orbitelor circulare și determină intervale pentru razele orbitelor stabile ISCO și OSCO, aceste rezultate având o importanță deosebită în fizica găurilor negre.

În ultima parte, am studiat termodinamica găurii negre de tip power-Maxwell. S-a demonstrat că prima lege a termodinamicii, precum și relația lui Smarr sunt satisfăcute. Capacitatea calorică a unei astfel de găuri negre este negativă, ceea ce duce la concluzia că gaura neagră este instabilă din punct de vedere termodinamic. Existența unui vârf de tip Schottky sugerează că acest tip de gaură neagră ar putea funcționa ca motor termic continuu.

2. Gaura neagră încărcată electric și scufundată în chintesență

Scopul acestui capitol constă în studiul detaliat al mișcării particulelor încărcate în jurul găurilor negre scufundate în chintesență, în prezența unui câmp electric. Pentru a studia traiectoriile, se deduc ecuațiile complete ale mișcării și se determină potențialul efectiv. În cazul general, ecuațiile de mișcare nu sunt integrabile analitic și traiectoriile se obțin numeric. O atenție deosebită se acordă calculului avansului de periastru și influenței energiei întunecate asupra acestuia. Calculele detaliate sunt prezentate în lucrarea [22].

2.1. Generalizarea soluției pentru gaura neagră încărcată electric

Recent, în [22], a fost obținută o nouă soluție, pornind de la o geometrie cu simetrie sferică generată de un fluid anizotrop. Aceasta are la bază elementul de linie

$$ds^2 = -\frac{f}{\Lambda^2}dt^2 + \Lambda^2 \left[\frac{dr^2}{f} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (26)$$

cu funcția metrică (3), adică $f = 1 - 2M/r - kr$ și mărimea $\Lambda = 1 - U^2 f$, unde constanta U este legată de sarcina găurii negre și satisface condiția $U \leq 1$. Singura componentă nenulă a potențialului vector este

$$A_t = \frac{Uf}{\Lambda}. \quad (27)$$

Pentru clasificarea traiectoriilor, se utilizează potențialul efectiv de forma

$$V_{eff} = \frac{\varepsilon U f}{\Lambda} + \sqrt{\frac{f}{\Lambda^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2 \Lambda^2} \right)}. \quad (28)$$

Atât mărimea U , cât și semnul sarcinii electrice efective ε au o influență pronunțată asupra condițiilor de existență a orbitelor legate. În exemplele de mai jos, se aleg valori ale parametrilor care permit existența acestor orbite, punând în evidență avansul de periastru.

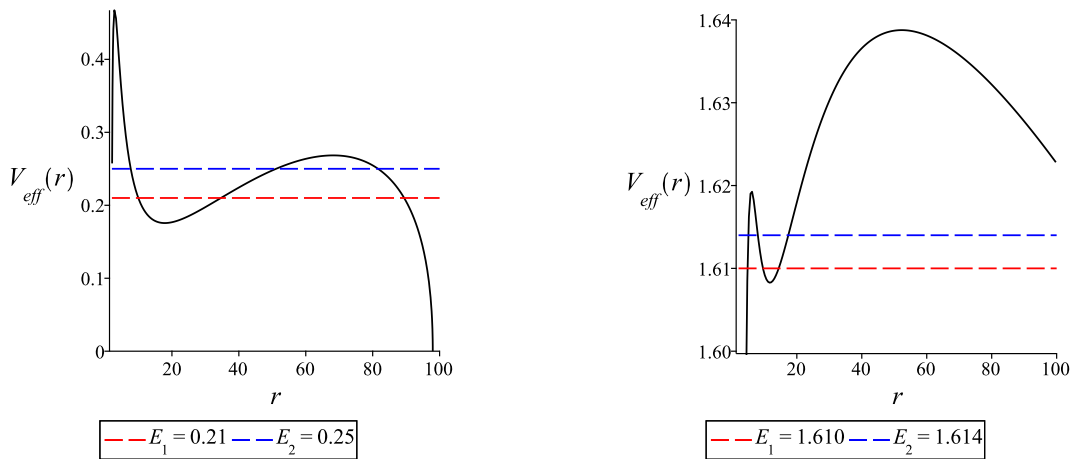


Figura 4: Potențialul efectiv (28) cu parametrii $M = 1$ și $U = 0.5$. *Stânga.* $k = 0.01$, $\varepsilon = -2$ și $L = \sqrt{6}$. *Dreapta.* $k = 0.0005$, $\varepsilon = 0.6$ și $L = 5$.

În figura 5 sunt reprezentate traiectoriile unei particule cu sarcină negativă ce se mișcă în

potențialul reprezentat în panoul din stânga al figurii 4. Se observă că traiectoria particulei cu energia $E = 0.21$ este deformată, iar avansul de periastru este negativ. Când energia particulei crește la valoarea $E = 0.25$, orbitele legate de tip eliptic capătă o excentricitate mai mare, iar avansul de periastru devine pozitiv (a se vedea panoul din dreapta al figurii 5). În cazul unei particule-test cu sarcină pozitivă aflată în potențialul reprezentat în panoul din dreapta al figurii 4, avansul de periastru este pozitiv, orbitele fiind reprezentate în figura 6. Forma traiectoriei este puternic influențată de energia particulei.

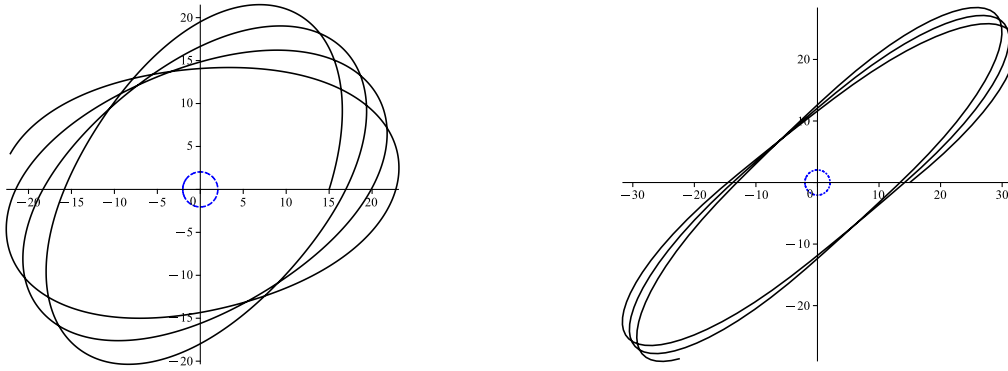


Figura 5: Orbite legate pentru potențialul reprezentat în panoul din stânga al figurii 4, cu energia particulei $E = 0.21$ (stânga) și $E = 0.25$ (dreapta).

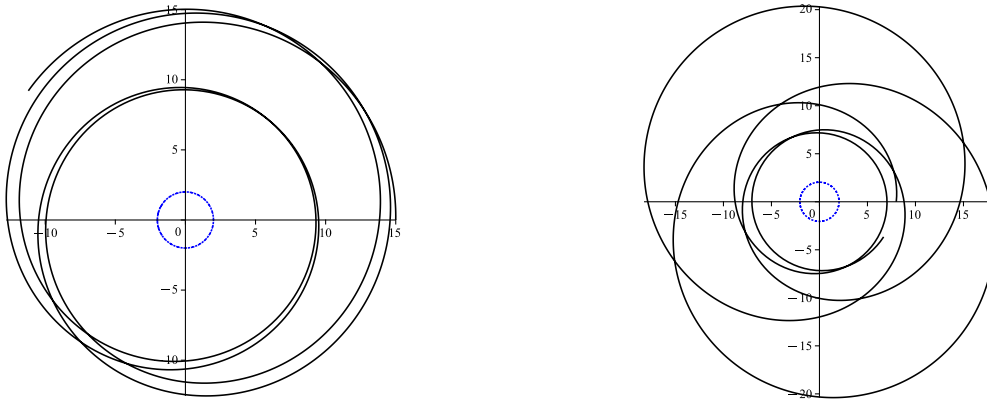


Figura 6: Orbite legate pentru potențialul din figura 4 (panoul din dreapta), cu energia particulei $E = 1.610$ (stânga) și $E = 1.614$ (dreapta).

2.2. Orbitele circulare și avansul de periastru

Dependența razei r_{ISCO} de sarcina specifică ε este reprezentată în figura 7. După cum se poate observa, pentru valori negative ale sarcinii specifice ε , raza ISCO scade odată cu creșterea lui $|\varepsilon|$, ca rezultat al interacțiunii coulombiene atractive cu sarcina găurii negre. Pe de altă parte, pentru particule încărcate pozitiv, raza ISCO se deplasează la distanțe mai mari față de gaura neagră. În ambele cazuri, prezența chintesenței conduce la o creștere a lui r_{ISCO} , ca urmare a existenței unei forțe repulsive induse de chintesență.

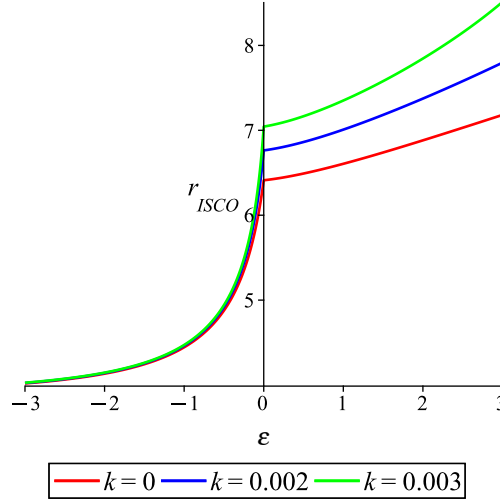


Figura 7: Dependența lui r_{ISCO} de ε pentru diferite valori ale lui k . Valorile parametrilor sunt: $M = 1$ și $U = 0.3$.

Pentru metricile cu simetrie sferică, autorii din [23] au găsit o formulă generală pentru avansul de periastru al orbitelor periodice cvasi-circulare. Frecvența azimutală este dată de relația

$$\omega_\varphi = \frac{L}{r^2}, \quad (29)$$

iar frecvența radială se calculează cu ajutorul derivatei a doua a potențialului efectiv în raport cu r , $\omega_r = \sqrt{V''}$. Expresia avansului de periastru este definită prin relația

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{Z}} - 1 \right), \quad (30)$$

unde $Z = (\omega_r/\omega_\varphi)^2$. Prin urmare, avansul de periastru este pozitiv atunci când $0 < Z < 1$, negativ când $Z > 1$ și zero pentru $Z = 1$.

Avansul de periastru în geometria Kiselev

În cazul geometriei Kiselev, avansul de periastru se exprimă în funcție de mărimea Z , care are forma explicită

$$Z = \frac{k^2 r^4 - 3kr^3 + 12Mkr^2 + 2Mr - 12M^2}{2Mr - kr^3}. \quad (31)$$

Utilizând Mathematica, se poate demonstra că avansul de periastru pentru traiectoriile particulelor care evoluează într-un spațiu-timp Kiselev este întotdeauna pozitiv.

Avansul de periastru pentru particule încărcate în jurul găurii negre încărcate electric și scufundate în chintesență

Din analiza figurilor 8, în care este reprezentată mărimea Z pentru diferite valori ale parametru-lui de chintesență, se observă că, spre deosebire de cazurile prezentate în secțiunile anterioare, unde $Z < 1$ și avansul de periastru este întotdeauna pozitiv, în cazul particulelor încărcate care

se mișcă în jurul găurii negre Kiselev încărcate electric, avansul de periastru poate fi atât pozitiv, cât și negativ. Astfel, prin schimbarea semnului sarcinii particulei, în timp ce ceilalți parametri sunt păstrați neschimbați, funcția Z poate deveni supraunitară, conducând la un avans de periastru negativ. Avansul de periastru negativ devine mai pronunțat pentru un parametru de chintesență mai mic.

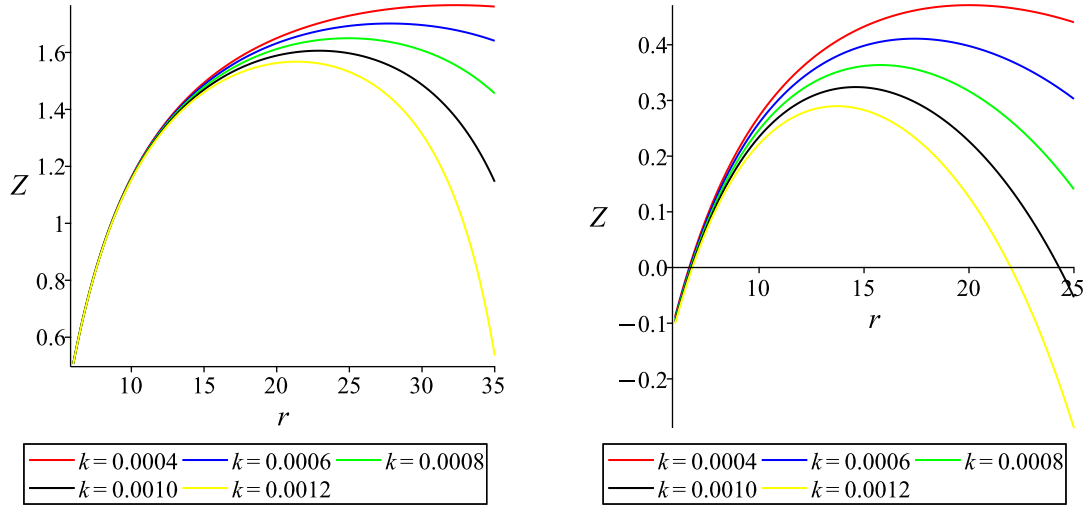


Figura 8: Funcția Z în funcție de parametrul de chintesență k pentru $\varepsilon = -1$ (stânga) și $\varepsilon = 1$ (dreapta). Valorile parametrilor sunt: $M = 1$ și $U = 0.3$.

2.3. Mișcarea fotonilor și umbra găurii negre

În încheierea acestui capitol, este prezentată succint mișcarea fotonilor restrânsă la planul ecuatorial. Se calculează parametrul de impact

$$b^2 = \frac{L^2}{E^2} = \frac{r^2 \Lambda^4}{f}, \quad (32)$$

a cărei valoare critică are expresia

$$b_{cr} = \frac{r_0(1 - U^2 f(r_0))^2}{\sqrt{f(r_0)}} \quad (33)$$

unde r_0 este raza orbitei circulare. În cazul găurii negre Schwarzschild, această valoare este $b_{cr}^S = 3\sqrt{3}M$, pentru $r_0 = 3M$. Pentru un observator situat la distanțe mari, $r_O \gg M$, raza unghiulară a umbrei găurii negre este dată de expresia simplă: $\alpha_{sh} \approx b_{cr}/r_O$. Valoarea critică a parametrului de impact este identificată cu raza umbrei găurii negre (*shadow*), adică $r_{sh} = b_{cr}$. Observațiile EHT asupra lui M87* au furnizat estimări ale deviației umbrei Schwarzschild, exprimate prin diferența dintre raza umbrei modelului r_{sh} și raza umbrei unei găuri negre Schwarzschild cu aceeași masă, r_{sh}^S [2]. Această deviație poate fi calculată folosind relația

$$\delta = \frac{r_{sh}}{3\sqrt{3}} - 1, \quad (34)$$

unde raza r_{sh} este exprimată în unități de masă. Evaluările numerice arată că parametrul critic de impact b_{cr} crește puternic cu parametrul k și, pentru $r > 3M$, se abate semnificativ de la

valoarea Schwarzschild $b_{cr}^S = 3\sqrt{3}M$. Atunci când câmpul electric este prezent, acesta reduce valoarea lui b_{cr} . Astfel, parametrii k și U^2 au efecte opuse.

2.4. Concluzii la capitolul 2

În acest capitol, s-a studiat o gaură neagră statică de tip Kiselev, cu simetrie sferică în prezența unui câmp electric. Potențialul efectiv joacă un rol crucial în determinarea tipului de orbită: de captare, de evadare sau legată. O atenție deosebită a fost acordată traiectoriilor circulare și cvasi-circulare. S-a arătat că chintesenta și sarcina particulei-test afectează stabilitatea orbitelor circulare. Astfel, chintesenta conduce la o creștere a lui r_{ISCO} . Pe de altă parte, pentru $\varepsilon > 0$, r_{ISCO} crește odată cu ε , pe când în cazul în care $\varepsilon < 0$, r_{ISCO} scade odată cu $|\varepsilon|$. Acest lucru se datorează interacțiunii coulombiene dintre sarcina particulei și sarcina găurii negre. Așa cum era de așteptat, pentru geometriile de tip Kiselev, s-a arătat că avansul de periastru este pozitiv și are o creștere semnificativă odată cu creșterea parametrului de chintesenta.

Un aspect interesant, care apare doar la găurile negre încărcate electric și scufundate în chintesenta, este acela că avansul de periastru poate fi atât pozitiv, cât și negativ. Corelat cu viitoare date observaționale, acest rezultat poate avea consecințe astrofizice importante. Calcule detaliate ale avansului de periastru în acest caz și ale influenței chintesentei asupra acestuia sunt dezvoltate în lucrarea [22]. Mișcarea fotonilor este, de asemenea, influențată de parametrii modelului. Astfel, mărimea umbrei găurii negre este afectată de U și k , iar parametrul de impact se abate semnificativ de la valoarea sa în cazul Schwarzschild. Parametrii U și k au efecte opuse, astfel încât, odată cu creșterea lui k , crește valoarea parametrului de impact, în timp ce prezența câmpului electric duce la o scădere a acestuia.

3. Gaura neagră înconjurată de un câmp magnetic și de chintesență

Scopul acestui capitol îl reprezintă o analiză detaliată a unei găuri negre înconjurată de un câmp magnetic poloidal și scufundată în chintesență. O astfel de configurație reprezintă o generalizare a soluției Ernst care descrie o gaură neagră Schwarzschild scufundată într-un câmp magnetic axial [24]. În modelul considerat, soluția Schwarzschild este înlocuită de metrica Kiselev. Rezultatele originale ale acestui capitol constituie subiectul lucrărilor [25, 26, 27], în care este descrisă pe larg procedura de generare a acestei soluții și sunt clasificate tipurile de traiectorii.

3.1. Metrica găurii negre Kiselev magnetizate

În [25, 28], autorii au generalizat soluția găsită de Cardoso et al. [29], prin introducerea unui câmp magnetic poloidal. Această soluție poate fi folosită ca model pentru o gaură neagră supermasivă aflată în centrul unei galaxii și înconjurată de materie întunecată. Astfel, metrica dedusă ca soluție a ecuațiilor Einstein are expresia generală [25]

$$ds^2 = -f\Lambda^2 dt^2 + \frac{\Lambda^2 dr^2}{f} + \Lambda^2 r^2 d\theta^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda^2} d\varphi^2, \quad (35)$$

unde $f = 1 - 2M/r - kr$ este funcția metrică, iar Λ este definită prin relația

$$\Lambda = 1 + B_0^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (36)$$

Parametrul B_0 este asociat inducției câmpului magnetic. Potențialul electromagnetic are componentele

$$A_i = \left(0, 0, 0, \frac{B_0 r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda}\right) \quad (37)$$

și generează un câmp magnetic aliniat axial, rupând simetria sferică a spațiului-timp. Se poate observa că, pentru $B_0 = 0$, se obține din (35) soluția Kiselev, așa cum era de așteptat. De asemenea, când nu există o gaură neagră, adică pentru $M = 0$ și $k = 0$, se obține universul magnetic Melvin [30]. În cazul în care parametrul de chintesență are valoarea $k = 0$, se recuperează soluția Ernst [24]. O particularitate a soluției Ernst este aceea că nu este asimptotic plată. Spațiul-timp Ernst prezintă un orizont al găurii negre la $r = 2M$, analog cazului Schwarzschild. În același timp, el posedă caracteristicile spațiului-timp Melvin pentru distanțe radiale mari [31].

3.2. Mișcarea particulelor încărcate în jurul găurii negre Kiselev magnetizate

În această secțiune se deduce expresia potențialului efectiv în care se mișcă particula cu sarcină specifică ε ,

$$V_{eff}(r, \theta) = f\Lambda^2 \left[1 + \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(L - \frac{\varepsilon B_0 r^2 \sin^2 \theta}{\Lambda} \right)^2 \right]. \quad (38)$$

Punctele de întoarcere sunt date de soluțiile ecuației $E^2 = V_{eff}(r, \theta)$. Potențialul efectiv (38) este pozitiv pentru $r \in (r_-, r_+)$ și $\theta \in (0, \pi)$ și se anulează la orizonturi. Spre deosebire de spațiul-timp Ernst, unde potențialul efectiv crește continuu cu coordonata radială r , această particularitate poate conduce la apariția unui maxim suplimentar al potențialului, în apropierea orizontului cosmologic, permițând existența unei a doua orbite circulare instabile. Pentru a

determina punctele critice ale potențialului (38), se impun condițiile $\partial_r V_{eff} = \partial_\theta V_{eff} = 0$, soluțiile acestora corespunzând punctelor de maxim și minim din planul ecuatorial, precum și punctelor de șa. Astfel, se obține coordonata radială a punctului de șa, $r_s = \sqrt{2M/k}$, care este determinată doar de prezența chintesenței.

Orbitele legate există atât timp cât energia particulei se află în intervalul $E^2 \in (E_{\min}^2, E_s^2)$, unde $E_{\min}^2$ reprezintă energia punctului de minim al potențialului efectiv, iar E_s^2 este energia asociată punctului de șa. Observăm că potențialul efectiv reprezentat în figura 9 prezintă trei puncte de extrem (un minim și două maxime), toate situate în planul ecuatorial, și două puncte de tip șa situate în afara planului ecuatorial.

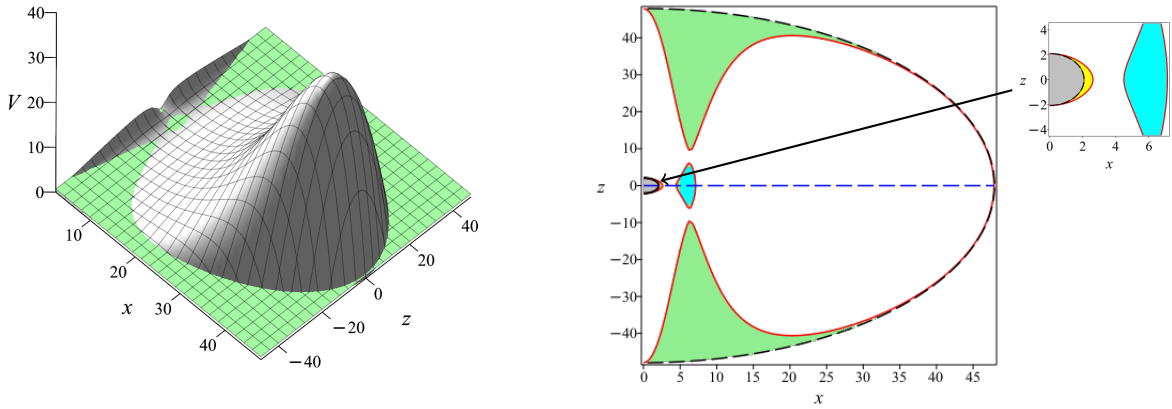


Figura 9: *Stânga*. Reprezentarea 3D a potențialului efectiv (38). Planul de culoare verde reprezintă energia $E^2 = 0.68$. *Dreapta*. Reprezentarea potențialului efectiv (38) în planul (x, z) . Regiunile permise de mișcare, pentru care $E^2 > V(x, z)$, sunt reprezentate prin zone colorate. Planul ecuatorial este indicat prin linia albastră întreruptă, iar orizontul cosmologic prin linia neagră întreruptă. În subfigura din dreapta, orizontul găurii negre situat la $r = r_-$ este reprezentat printr-o linie neagră continuă. Valorile numerice ale parametrilor sunt $M = 1$, $k = 0.02$, $\varepsilon = 3$, $B_0 = 0.04$ și $L = 5$.

Clasificarea orbitelor

- *Orbite circulare*. În funcție de valorile parametrilor, potențialul efectiv poate permite existența unei orbite circulare stabile în planul ecuatorial.
- *Orbite de captură*. Particula cu energie $E^2 \in (0, V_{max1})$, care își începe mișcarea în regiunea galbenă din panoul din dreapta al figurii 9, va fi capturată de gaura neagră. Același lucru se întâmplă și pentru valori mari ale energiei, $E^2 > V_{max1}$, caz în care regiunile galbenă, cian și verde se unesc. O astfel de traiectorie este prezentată în figura 10.

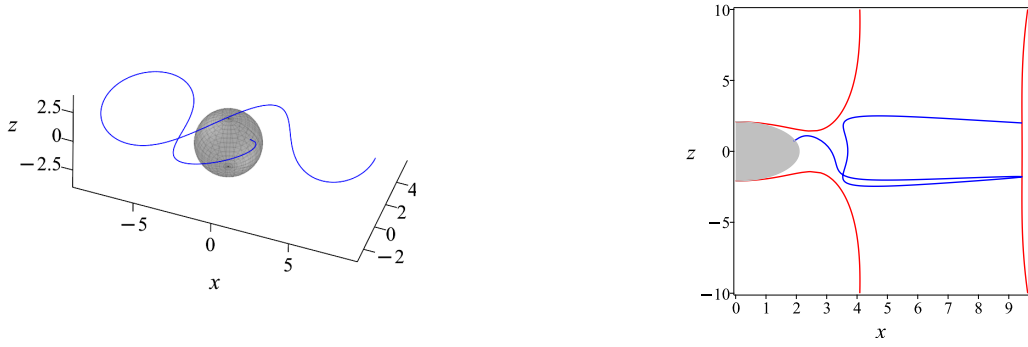


Figura 10: *Stânga*. Orbita de captură a unei particule cu energia $E^2 = 1.00$. *Dreapta*. Reprezentarea orbitei în planul $x - z$. Valorile parametrilor sunt cele din figura 9.

- *Orbite de evadare*. Particula care își începe mișcarea în regiunea verde (a se vedea panoul din dreapta al figurii 9) va evada către orizontul cosmologic, așa cum se poate observa în figura 11. Odată ce energia crește și $E^2 \in (V_s, V_{max1})$, regiunea verde se unește cu cea cian, iar particula este întotdeauna în regim de evadare. Pentru $E^2 > V_{max1}$, toate regiunile permise se unesc, iar particula fie este capturată, fie evadează spre orizontul cosmologic.



Figura 11: *Stânga*. Orbită de evadare a unei particule cu energia $E^2 = 1.00$. *Dreapta*. Reprezentarea orbitei în planul $x - z$. Valorile parametrilor sunt cele din figura 9.

- *Orbite legate*. Aceste situații corespund particulelor cu energia $V_{min} \leq E^2 < V_s$, care se mișcă în regiunea cian (a se vedea panoul din dreapta al figurii 9). De exemplu, particula cu $E^2 = 0.68$, care își începe mișcarea în regiunea gri, are o traiectorie legată, reprezentată în figura 12. Pe măsură ce energia particulei scade către valoarea minimă locală V_{min} , regiunea de culoare cian se micșorează, iar traiectoria corespunzătoare tinde către o orbită circulară.

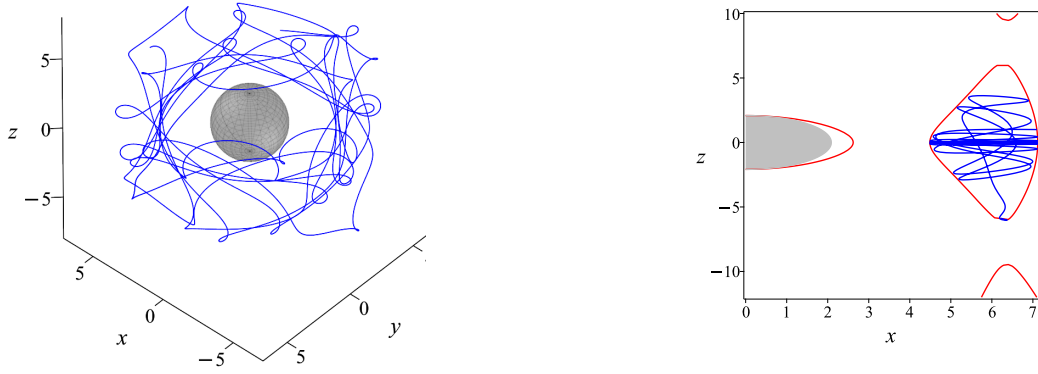


Figura 12: *Stânga*. Orbita legată a unei particule cu energia $E^2 = 0.68$. *Dreapta*. Reprezentarea orbitei în planul $x - z$. Valorile parametrilor sunt cele din figura 9.

Traectoriile particulelor pot fi ondulate atunci când, pentru un θ constant, expresia lui $\dot{\varphi}$ își schimbă semnul. După cum se va vedea în secțiunea următoare, proiecțiile traiectoriilor în planul xOy au forma unor trohoide.

3.3. Orbitele în planul ecuatorial

În cele ce urmează, se consideră cazul simplificat al mișcării în planul ecuatorial. Astfel, considerând $\theta = \pi/2$, funcția Λ devine

$$\Lambda_0 = 1 + B_0^2 r^2 \quad (39)$$

iar potențialul efectiv este

$$V_0 = f\Lambda_0^2 \left[1 + \frac{\Lambda_0^2}{r^2} \left(L - \frac{\varepsilon B_0 r^2}{\Lambda_0} \right)^2 \right]. \quad (40)$$

În analiza noastră, sunt alese valorile parametrilor B_0 și k astfel încât potențialul efectiv să prezinte un minim între două maxime, permițând existența orbitelor legate. În general, traiectoriile timelike într-un câmp magnetic extern sunt ondulate, de tip trohoidal [32]. Particulele-test care se mișcă în planul ecuatorial sunt supuse unei forțe gravitaționale spre interior, care este, de asemenea, ortogonală la liniile câmpului magnetic.

Din condițiile $V_0 = E^2$ și $V'_0 = 0$, se obține expresia momentului cinetic corespunzător traiectoriei circulare. Acesta este reprezentat grafic în figura 13. În panoul din stânga, se observă că, odată cu creșterea parametrului k , intervalul radial corespunzător orbitelor circulare stabile crește. De asemenea, poziția razei ISCO crește, indicând faptul că termenul de chintesență influențează stabilitatea orbitelor. În panoul din dreapta, se observă că, odată cu creșterea inducției B_0 , intervalul permis pentru orbitele circulare se îngustează, iar raza ISCO se apropie de gaura neagră.

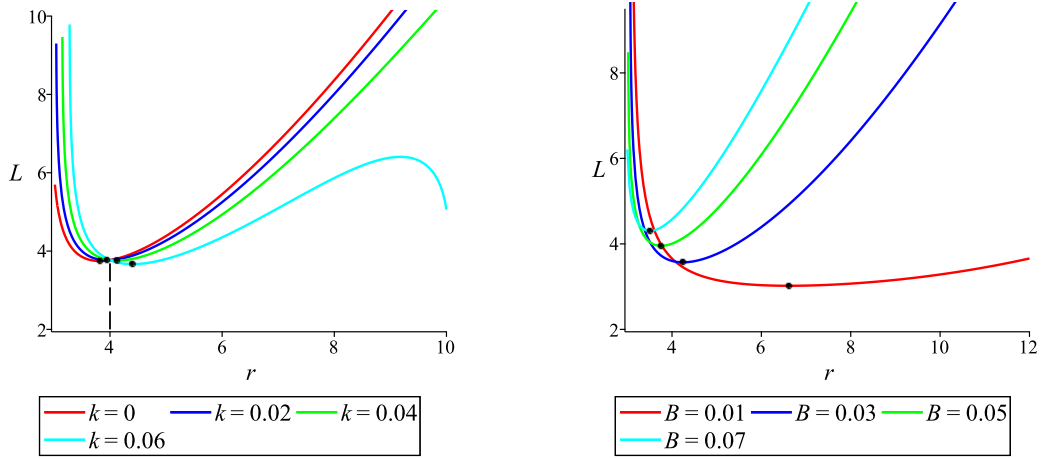


Figura 13: Reprezentarea grafică a momentului cinetic L pentru diferite valori ale lui k și $B_0 = 0.04$ (stânga) și pentru diferite valori ale lui B_0 și $k = 0.02$ (dreapta). Punctele de culoare neagră reprezintă raza ISCO, r_{ISCO} . Celelalte valori numerice sunt: $M = 1$ și $\varepsilon = 3$.

Frecvențele epiciclice ale orbitelor cvasi-circulare

Mișcarea epiciclică a orbitelor cvasi-circulare este deosebit de importantă, deoarece frecvențele acestei mișcări pot fi corelate cu datele observaționale. Acestea au fost studiate și în spațiul-timp Ernst [33, 34]. Este de așteptat ca, și în acest caz, chintesenta să aibă un impact semnificativ. Hamiltonianul sistemului poate fi separat într-o parte dinamică și una potențială, $H = H_{din} + H_{pot}$, partea potențială fiind

$$H_{pot} = \frac{1}{2} \left[\frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} (L - \varepsilon B_0 r^2 \sin^2 \theta)^2 + 1 \right]. \quad (41)$$

Frecvențele epiciclice măsurate de un observator local au expresiile:

$$\omega_r^2 = \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial^2 H_{pot}}{\partial r^2}, \quad \omega_\theta^2 = \frac{1}{g_{\theta\theta}} \frac{\partial^2 H_{pot}}{\partial \theta^2}, \quad \omega_\varphi = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} (L - \varepsilon B_0 r^2) \quad (42)$$

Din punct de vedere observațional, raportul ω_r/ω_θ poate fi relevant în analiza fenomenelor de tip QPO (*Quasi-Periodic Oscillations*), deoarece raportul ω_θ/ω_r reprezintă o mărime direct legată de condițiile de rezonanță orbitală din vecinătatea găurilor negre [35]. În general, se caută rapoartele de rezonanță $\omega_r : \omega_\theta = 1 : 2$, $\omega_r : \omega_\theta = 3 : 2$ și $\omega_r : \omega_\theta = 2 : 3$. După cum este reprezentat în panoul din stânga al figurii 14, odată cu creșterea lui k , raportul ω_θ/ω_r descrește rapid și atinge valoarea zero la raze mai mici, sugerând o restrângere a regiunii în care mișcarea latitudinală rămâne stabilă. În panoul din dreapta, pentru $k = 0.02$, variația parametrului magnetic B_0 arată că intensificarea câmpului magnetic conduce, de asemenea, la scăderea raportului ω_θ/ω_r pentru o valoare fixă a lui r . Astfel, câmpul magnetic tinde să reducă dominanța oscilațiilor latitudinale în raport cu cele radiale, modificând rezonanțele posibile dintre cele două moduri de oscilație.

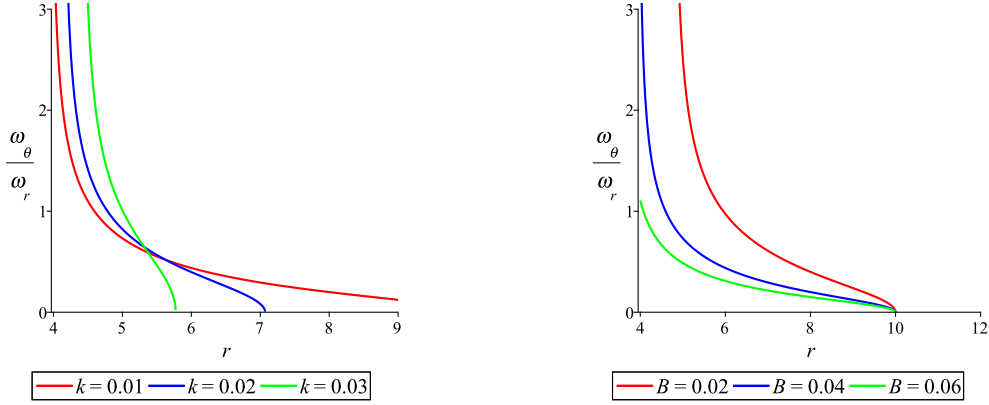


Figura 14: Reprezentarea grafică a raportului ω_θ/ω_r pentru diferite valori ale lui k și $B_0 = 0.04$ (*stânga*) și pentru diferite valori ale lui B_0 și $k = 0.02$ (*dreapta*). Celelalte valori numerice sunt: $M = 1$ și $\varepsilon = 3$.

3.4. Abordarea analitică în aproximația câmpului magnetic slab

O abordare analitică este posibilă doar în cazul unui câmp magnetic slab, pentru care se poate lucra în aproximația $\Lambda \approx 1$, care este în concordanță cu datele observaționale. Pentru mișcarea în planul ecuatorial, în primul ordin de aproximare, soluțiile ecuațiilor de mișcare sunt

$$\delta r = \alpha \cos(\omega\tau) - \frac{2M - kr_0^2}{2\omega^2 r_0^2}, \quad (43)$$

$$\delta\varphi = -\frac{2\varepsilon B_0 \alpha}{\omega r_0} \sin(\omega\tau) + \frac{\varepsilon B_0 (2M - kr_0^2)}{\omega^2 r_0^3} \tau, \quad (44)$$

unde α reprezintă o constantă de integrare, iar $\omega = 2\varepsilon B_0 \sqrt{1 - 2M/r_0 - kr_0}$ este frecvența ciclotronică relativistă. Expresiile (43) și (44) reprezintă soluția parametrică a unei trohoide [32]. În funcție de valorile parametrilor, sunt posibile trei tipuri de traiectorii, descrise de parametrul η :

$$\eta = \frac{2M - kr_0^2}{2\omega^2 r_0^2 \alpha}, \quad (45)$$

acesta putând avea atât valori pozitive, cât și negative. Relațiile de mai sus conduc la orbite de tipul celor din figura 15. Aspectul traiectoriei depinde de modul în care termenii M/r_0^2 și $k/2$ se raportează unul la celălalt. De exemplu, dacă $r_0 > r_* = \sqrt{2M/k}$, orbita particulei se curbează spre exteriorul găurii negre, deoarece termenul repulsiv domină. În cazul în care raza orbitei circulare este apropiată de valoarea r_* , se recuperează mișcarea într-un spațiu-timp plat, unde particula are traiectoria elicoidă din dreapta figurii 15.

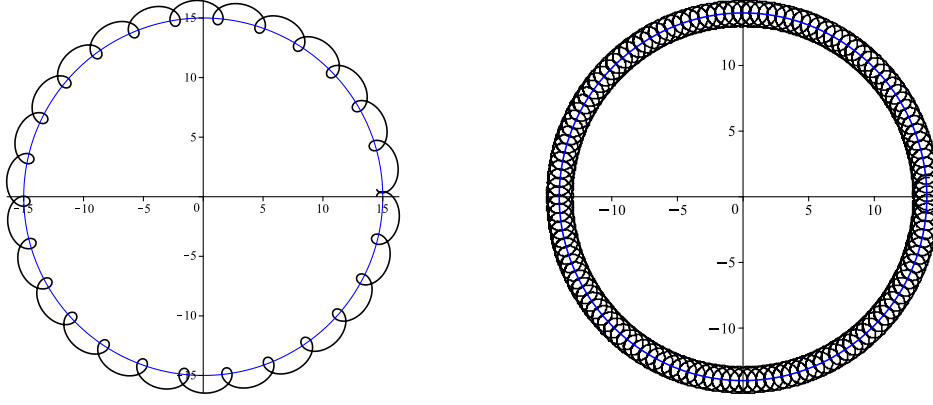


Figura 15: *Stânga*. Cicloidă prolată cu $\eta = -0.5$ și $L = 4.5$. Cercul albastru reprezintă raza orbitei circulare situată la $r_0 = 15$. *Dreapta*. Mișcare elicoidală în jurul orbitei circulare situată la $r_0 = 14$, unde $\eta = 0.09$ și $L = 3.9$. Celelalte valori numerice sunt $M = 1$, $B_0 = 0.02$, $\varepsilon = 1$ și $k = 0.01$.

Când orbita este perturbată atât în direcția radială, cât și în direcția polară, soluția ecuației pentru θ este dată de funcțiile Mathieu [36] sub forma:

$$\theta_1 = C_1 \text{Mathieu}C(a, q, t) + C_2 \text{Mathieu}S(a, q, t), \quad (46)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare, iar expresiile parametrilor funcțiilor *MathieuC* și *MathieuS* sunt

$$a = \frac{8\varepsilon^2 B_0^2 (2M - kr_0^2)}{\omega^4 r_0^3}, \quad q = \frac{8\varepsilon^2 B_0^2 \alpha}{\omega^2 r_0} = \frac{a}{2\eta}, \quad t = \frac{\omega}{2}\tau. \quad (47)$$

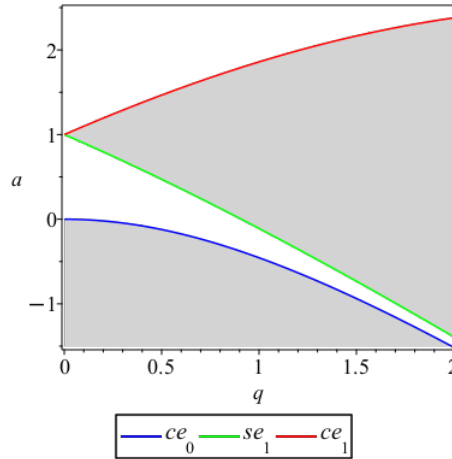


Figura 16: Diagrama de stabilitate a ecuației Mathieu pentru $q \in (0, 2)$.

În figura 16 este reprezentată diagrama de stabilitate a soluțiilor ecuației Mathieu pentru $q \in (0, 2)$. Dacă parametrii a și q sunt negativi, regiunile de stabilitate sunt foarte înguste. În analiza de față, parametrul q poate fi ajustat prin modificarea parametrului η . În funcție de semnul expresiei $2M - kr_0^2$, parametrii a și q pot fi pozitivi pentru $r_0 < r_*$ sau negativi pentru $r_0 > r_*$. Traectoriile sunt preponderent instabile, acest fapt fiind o consecință a prezenței chintesenței.

3.5. Geodezice nule. Efectul de lentilă gravitațională

La finalul acestui capitol, se revine la metrica generală (35) și este menționat succint cazul geodezicelor nule, datorită implicațiilor astrofizice importante. Pentru a pune în evidență efectele câmpului magnetic și ale chintesenței asupra geodezicelor nule, se determină parametrul de impact $b = L/E$ și unghiul de deviere α [27]. Ecuația de mișcare este

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2}{\Lambda^4} \left(\frac{r^2}{b^2 \Lambda^4} - f \right), \quad (48)$$

iar distanța minimă față de gaura neagră, $r_{\min}$, se obține din condiția $dr/d\varphi = 0$. Parametrul de impact critic b_c este calculat pentru raza orbitei circulare r_0 prin relația

$$b_c = \frac{r}{f^{1/2} \Lambda^2} \Big|_{r=r_0}. \quad (49)$$

Dacă parametrul de impact satisface relația $b > b_c$, atunci fotonul va fi deviat de gaura neagră, iar dacă $b < b_c$, acesta va fi atras în gaura neagră.

3.6. Concluzii la capitolul 3

În acest capitol, a fost analizată o gaură neagră magnetizată descrisă de o generalizare a soluției Kiselev. Tipurile de orbite sunt date de potențialul efectiv, care depinde de valorile inducției magnetice și ale parametrului de chintesență. Acești parametri determină intervalul radial de existență a orbitelor stabile. Analiza prezentată generalizează cazurile mișcării particulelor încărcate în universurile Melvin și Ernst studiate de Lim [34], Frolov și Shoom [32]. Principala diferență este că, în modelul considerat, asupra unei particule-test acționează atât o forță gravitațională atractivă, cât și o forță repulsivă indusă de chintesență. Astfel, au fost puse în evidență comportamente care nu au echivalent în spațiul-timp Ernst. De exemplu, s-a evidențiat existența unor puncte critice de tip șa, situate în afara planului ecuatorial, precum și existența unei valori de referință a coordonatei radiale, dependentă doar de parametrul de chintesență, care limitează superior domeniul de existență a orbitelor stabile.

În cazul unui câmp magnetic slab, pentru mișcarea în planul ecuatorial, se obțin ecuațiile parametrice ale unor traiectorii trohoidale, în timp ce mișcarea perturbată în direcția polară este descrisă de funcțiile Mathieu. Au fost puse în evidență intervale ale parametrilor pentru care exponentul caracteristic Mathieu este real, iar funcțiile Mathieu sunt mărginite, ceea ce conduce la traiectorii stabile față de planul ecuatorial. Ca o concluzie, se observă că prezența chintesenței joacă un rol esențial, conducând la instabilitatea orbitei circulare față de planul ecuatorial.

În ceea ce privește frecvențele epicyclice, s-a constatat că acestea sunt puternic influențate de prezența chintesenței, care poate modifica aspectul traiectoriei ondulate, curbând-o spre exterior.

Rezultatele obținute în acest capitol au un pronunțat caracter original, fiind publicate în lucrările [25, 26, 27].

4. Găuri negre în rotație scufundate în chintesență

Tema centrală a acestui capitol este analiza dinamicii particulelor-test care se mișcă în jurul unei găuri negre de tip Kerr, înconjurată de chintesență. Studiile recente au demonstrat că, pe lângă efectele gravitaționale obișnuite, prezența unei componente de energie întunecată poate modifica semnificativ traiectoriile particulelor, afectând astfel formarea discurilor de acreție și a jeturilor relativiste [35]. Rezultatele originale prezentate în acest capitol au fost dezvoltate în lucrările [37, 38].

4.1. Geometria găurii negre Kerr înconjurată de chintesență

Recent, soluția Kiselev a fost generalizată la o metrică de tip Kerr, folosind algoritmul Newman–Janis [35]. Elementul de linie al unei metrici nediagonale se scrie sub forma:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi \quad (50)$$

unde componentele tensorului metric au următoarele expresii [35]:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, & g_{rr} &= \frac{\Sigma}{\Delta}, & g_{\theta\theta} &= \Sigma, \\ g_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \left[\Sigma + a^2 \sin^2 \theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right], \\ g_{t\varphi} &= -a \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Aici, a este parametrul de spin al găurii negre, iar Σ și Δ sunt date de relațiile

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (52)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr - kr^{1-3w}. \quad (53)$$

Ca și în capitolele anterioare, pentru simplitate, analiza se limitează la cazul în care parametrul din ecuația de stare are valoarea $w = -2/3$. Se obține următoarea constrângere asupra parametrului de chintesență k :

$$k < k_c = \frac{1}{6M} \quad (54)$$

și valoarea maximă permisă a parametrului de spin:

$$a \leq a_c = \frac{2M}{\sqrt{3}} \quad (55)$$

care este mai mare decât în cazul găurii negre Kerr, unde $a_c = M$.

Folosind formalismul Hamilton–Jacobi, se obțin patru ecuații ce descriu mișcarea particulei:

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R(r)}, \quad (56)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\Theta(\theta)}, \quad (57)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z] - \left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right), \quad (58)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_z] - a(aE \sin^2 \theta - L_z). \quad (59)$$

Polinoamele care descriu mișcarea radială și polară au expresiile

$$\Theta(\theta) = Q + \cos^2 \theta \left[(m^2 - E^2)a^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (60)$$

$$R(r) = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta [(aE - L_z)^2 + r^2 + Q], \quad (61)$$

unde Q este constanta Carter.

Mișcarea radială

Mișcarea radială este guvernată de ecuația (56), pentru care trebuie impusă condiția $R(r) \geq 0$ pentru a avea orbite fizice. În cazul unei rădăcini duble a ecuației $R(r) = 0$, trebuie satisfăcute simultan condițiile $R(r_0) = R'(r_0) = 0$. Prin rezolvarea acestui sistem, se obțin expresiile energiei E și ale constantei Carter Q pentru care există o orbită sferică de rază r_0 .

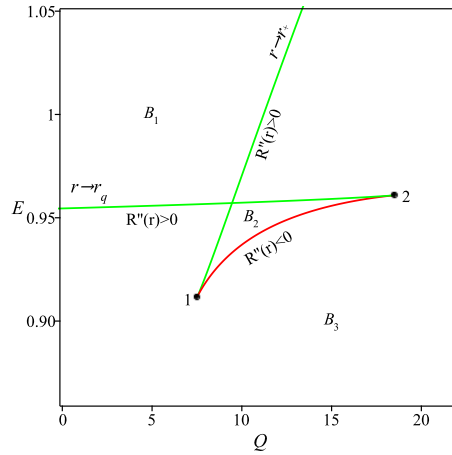


Figura 17: Spațiul parametrilor descris de energia E și constanta Carter Q , reprezentat pentru $M = a = L_z = 1$ și $k = 0.001$. Curbele de culoare verde corespund orbitelor sferice instabile având $R''(r_0) > 0$, iar curba de culoare roșie corespunde orbitelor sferice stabile cu $R''(r_0) < 0$. Curbele se întâlnesc în două puncte, notate pe figură cu 1 și 2, unde $R''(r_0) = 0$ și corespund orbitelor sferice critice (OSC).

După cum se poate observa în figura 17, sunt posibile două tipuri de orbite sferice, cele instabile, situate între $r_0 \in (r_+, r_{OSC1}) \cup (r_{OSC2}, r_q)$, pentru care $R''(r_0) > 0$, și cele stabile, situate în intervalul $r_0 \in (r_{OSC1}, r_{OSC2})$ pentru care $R''(r_0) < 0$. Spațiul parametrilor E - Q este împărțit în trei regiuni distincte. În regiunea B_1 , ecuația $R(r) = 0$ admite doar o soluție reală pozitivă, iar orbita unei particule care are energia și constanta Carter asociate acestei regiuni poate fi de captură sau evadare. Pe de altă parte, în regiunea B_3 , ecuația $R(r) = 0$ admite trei soluții reale pozitive, prin urmare, orbita unei particule poate fi fie de captură, fie de evadare, cele două regiuni fiind separate. Existența orbitelor legate este condiționată de pozitivitatea polinomului $R(r)$ între două rădăcini ale acestuia, iar rădăcinile trebuie să fie în intervalul $r \in (r_+, r_q)$. Acest caz corespunde energiei și constantei Carter în regiunea B_2 , delimitată de dreptele verzi și curba roșie. Ecuația $R(r) = 0$ admite cinci rădăcini reale pozitive, dintre care doar patru sunt între cele două orizonturi. Astfel, orbita unei particule poate fi de captură, evadare sau legată.

Mișcarea polară

Pentru a avea orbite fizice, trebuie impusă condiția $\Theta(\theta) \geq 0$, unde polinomul $\Theta(\theta)$ are expresia (60). Este mai convenabil să utilizăm variabila $\cos^2 \theta = u$, astfel încât ecuația $\Theta(u) = 0$ devine

$$\varepsilon a^2 u^2 - (\varepsilon a^2 + Q + L_z^2) u + Q = 0, \quad (62)$$

unde $\varepsilon = 1 - E^2$. La poli, unde $u = 1$, avem $\Theta(u = 1) = -L_z^2$, astfel încât particula-test poate ajunge la poli doar dacă $L_z = 0$. Această traiectorie este cunoscută sub denumirea de *orbită polară*. Pe de altă parte, în planul ecuatorial, unde $u = 0$, avem $\Theta(u = 0) = Q$, astfel încât particula se poate menține în acest plan doar dacă $Q = 0$. Soluțiile ecuației (62) au forma

$$u_{\pm} = \frac{\varepsilon a^2 + Q + L_z^2 \pm \sqrt{Q^2 + 2(L_z^2 - \varepsilon a^2)Q + (\varepsilon a^2 + L_z^2)^2}}{2\varepsilon a^2}. \quad (63)$$

Pentru a avea orbite fizice, adică $\Theta(u) \geq 0$, trebuie impusă condiția ca cel puțin una dintre rădăcini să fie în intervalul $u \in [0, 1]$.

4.2. Orbitele sferice

Din condițiile $R(r_0) = R'(r_0) = 0$, se obțin expresiile energiei și ale constantei Carter care trebuie să fie mărimi pozitive. Pentru o valoare critică a parametrului de chintesență, $k = k_*$, constanta Carter se anulează. Această valoare scade pe măsură ce raza orbitei sferice crește.

Pentru a determina zonele de stabilitate și instabilitate, se rezolvă sistemul $R(r_0) = R'(r_0) = R''(r_0) = 0$ și se găsesc mărimile E , Q și r_0 în funcție de parametrii M , a , k și $L = L_z$. Re-prezentând grafic r_0 în funcție de un parametru ales, se obțin zonele de stabilitate/instabilitate. În figura 18 sunt reprezentate aceste zone, pentru diferite valori ale parametrului k . Se poate observa că, pe măsură ce k crește, zona de stabilitate se îngustează. Se poate arăta că pentru $k > 1/(8M)$, nu mai există orbite sferice stabile.

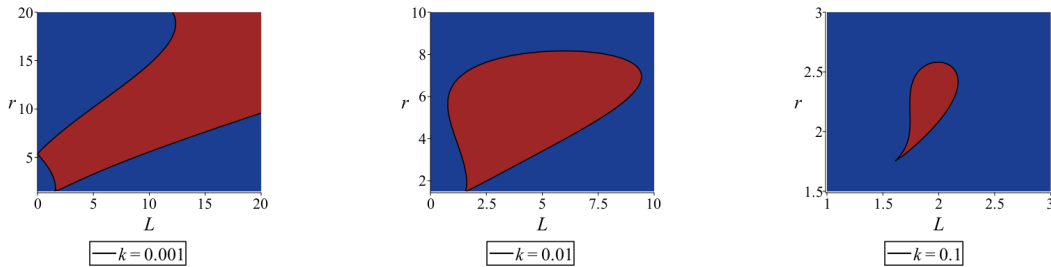


Figura 18: Reprezentarea grafică a zonelor de stabilitate (roșu) și instabilitate (albastru) pentru diferite valori ale parametrului k . Conturul de culoare neagră corespunde orbitei sferice critice (OSC) și separă zona de stabilitate de cea de instabilitate. S-a considerat $M = a = 1$.

Soluțiile analitice ale ecuațiilor de mișcare pentru orbitele sferice

Ca și în cazul metricii Kerr, ecuațiile de mișcare admit soluții analitice, acestea fiind exprimate prin funcții eliptice [39]. Folosind parametrul Mino λ [18], definit prin $d\tau = \Sigma d\lambda$, se obține soluția ecuației care descrie mișcarea polară

$$\theta(\lambda) = \arccos \left[\sqrt{u_- \operatorname{sn}(a\sqrt{(1 - E^2)u_+}\lambda, \kappa)} \right], \quad (64)$$

unde u_- și u_+ sunt soluțiile ecuației $u(u_- - u)(u_+ - u) = 0$ cu $u = \cos^2 \theta$, iar $\kappa = \sqrt{\frac{u_-}{u_+}}$. Frecvența fundamentală a mișcării polare este dată de relația

$$\Omega_\theta = \frac{2\pi}{T_\theta}, \quad T_\theta = \frac{4K(\kappa)}{a\sqrt{(1-E^2)u_+}} \quad (65)$$

unde T_θ reprezintă perioada unei oscilații complete în latitudine, iar $K(\kappa)$ este integrala eliptică completă de speța întâi. Variația lui φ în timpul unei oscilații în latitudine T_θ este

$$\Delta\varphi = \frac{4}{a\sqrt{(1-E^2)u_+}} \left[L_z \Pi(u_-, \kappa) + \frac{a}{\Delta} [E(2Mr + kr^3) - aL_z] K(\kappa) \right], \quad (66)$$

unde $\Pi(u_-, \kappa)$ este integrala eliptică completă de speța a treia. Precesia orbitei sferice se poate calcula prin relația

$$\Omega = \Omega_\varphi - \Omega_\theta = \frac{\Delta\varphi - 2\pi}{T_\theta}. \quad (67)$$

Pentru $k = 0$, toate relațiile de mai sus capătă formele particulare deduse în lucrarea lui Teo [39]. În cazul Kerr, valoarea lui $\Delta\varphi$ este pozitivă pentru $L_z > 0$ și negativă pentru $L_z < 0$. Orbitale prograde au $|\Delta\varphi| > 2\pi$, pe când cele retrograde au $|\Delta\varphi| < 2\pi$ [39].

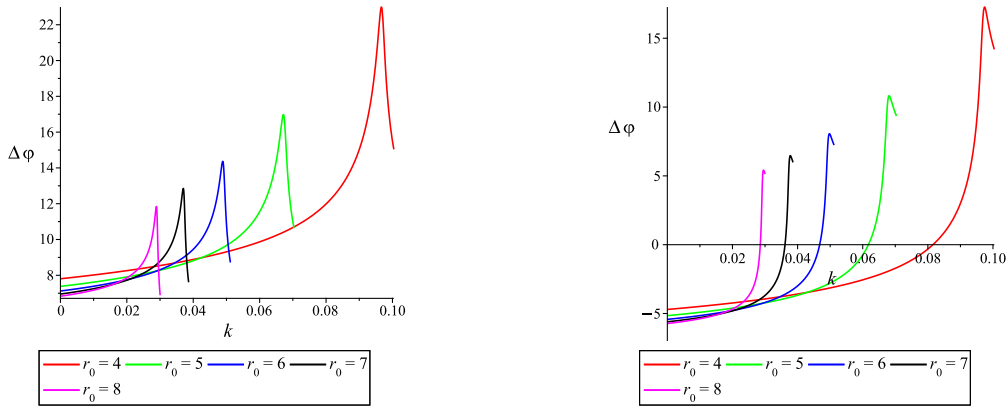


Figura 19: Expresia lui $\Delta\varphi$ în funcție de k , pentru o oscilație în latitudine, pentru diverse raze ale orbitelor. Se consideră $L_z = 0.1$ (*stânga*) și $L_z = -0.1$ (*dreapta*). Valorile parametrilor sunt $M = a = 1$.

Chintesența joacă un rol crucial în fenomenul de precesie a orbitelor, după cum se observă în figura 19. Astfel, orbitale sferice care sunt caracterizate de un moment cinetic $L_z > 0$ sunt întotdeauna prograde, pe când în cazul $L_z < 0$ orbitale retrograde pot deveni prograde odată cu creșterea lui k , spre deosebire de cazul Kerr, unde orbitale cu $L_z < 0$ sunt întotdeauna retrograde. De asemenea, după cum se observă în figura 20, frecvența fundamentală de precesie rămâne mereu pozitivă pentru $L_z > 0$, pe când în cazul $L_z < 0$, aceasta devine pozitivă doar pentru valori mari ale lui k . Se observă că atât $\Delta\varphi$, cât și Ω cresc odată cu k , ating valori maxime, apoi încep să scadă până în punctul în care constanta Carter devine nulă.

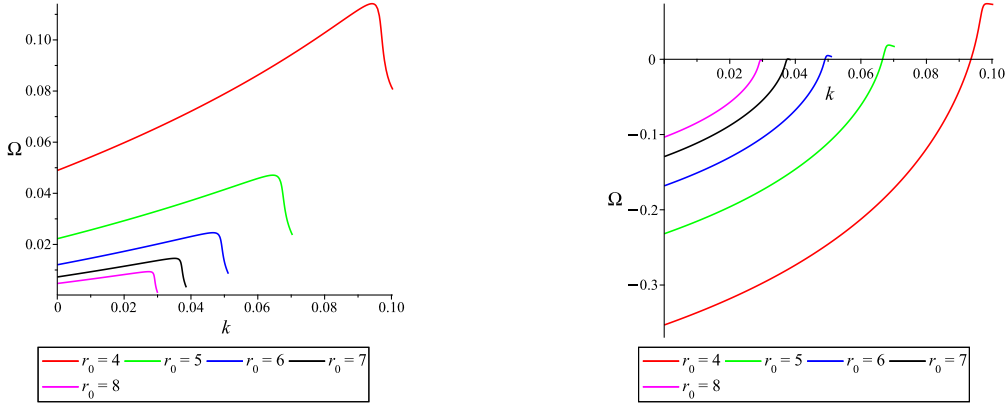


Figura 20: Precesia orbitei sferice (67) în funcție de k , pentru o oscilație în latitudine, pentru diverse raze ale orbitelor. Se consideră $L_z = 0.1$ (stânga) și $L_z = -0.1$ (dreapta). Valorile parametrilor sunt $M = a = 1$.

Exemple de traiectorii sferice

În figura 21 sunt reprezentate câteva exemple de orbite sferice în jurul unei găuri negre de tip Kerr, înconjurată de chintesență. Parametrii utilizați sunt enumerați în tabelul 1, unde, pentru simplitatea analizei, s-a considerat masa găurii negre $M = 1$.

Figura	r_0	a	k	L_z	E	Q	$\Delta\varphi$	Ω_θ	Ω_φ	Ω
(a)	4/3	1	0.001	1.5	0.745	0.64	21.66	0.90	3.12	2.22
(b)	4/3	1	0.001	1.9	0.968	3.01	21.51	1.16	3.96	2.80
(c)	3/2	1	0.01	1.8	0.895	2.63	17.13	0.91	2.47	1.56
(d)	6	1	0.001	0	0.933	11.20	7.14	0.09	0.10	0.01
(e)	10	1	0.01	-3	0.951	7.23	-5.82	0.04	0.03	-0.01
(f)	10	1	0.001	3	0.944	2.35	6.65	0.03	0.04	0.01

Tabelul 1: Parametrii orbitelor sferice reprezentate în figura 21.

Rezultatele numerice arată că stabilitatea orbitelor sferice depinde puternic de valoarea constantei Carter Q . Pentru orbitele apropiate de orizontul găurii negre, o valoare mică a lui Q favorizează stabilitatea, așa cum se observă în figura (a), în timp ce o valoare mare a acesteia conduce la orbite instabile, precum în figura (b). În acest caz, particula efectuează câteva rotații în jurul găurii negre, după care evadează spre orizontul cosmologic. Orbitele apropiate de orizont au o precesie mare. Pentru traiectoriile din figurile (a) și (b), unde $r_+ = 1.033$ și $r_0 = 4/3$, particula efectuează aproximativ 3.4 revoluții pentru fiecare oscilație în latitudine. Un comportament similar apare și în figura (c), unde orbita este instabilă, iar particula efectuează aproximativ 2.7 revoluții pentru fiecare oscilație latitudinală. Cazul particular $L_z = 0$, prezentat în figura (d), descrie o traiectorie care trece prin poli la fiecare oscilație în latitudine. Chiar dacă momentul cinetic azimutal este nul, punctul final al traiectoriei este deplasat față de punctul inițial datorită efectului de *frame-dragging*. Pentru orbitele sferice îndepărtate, situate la $r_0 = 10$, precesia devine foarte mică. Orbita din figura (e) este retrogradă, deoarece $L_z < 0$, iar $|\Delta\varphi| < 2\pi$, ceea ce înseamnă că particula efectuează mai puțin de o revoluție pentru fiecare oscilație în latitudine. În schimb, orbita progradă din figura (f) corespunde aproximativ unei revoluții complete pentru fiecare oscilație latitudinală.

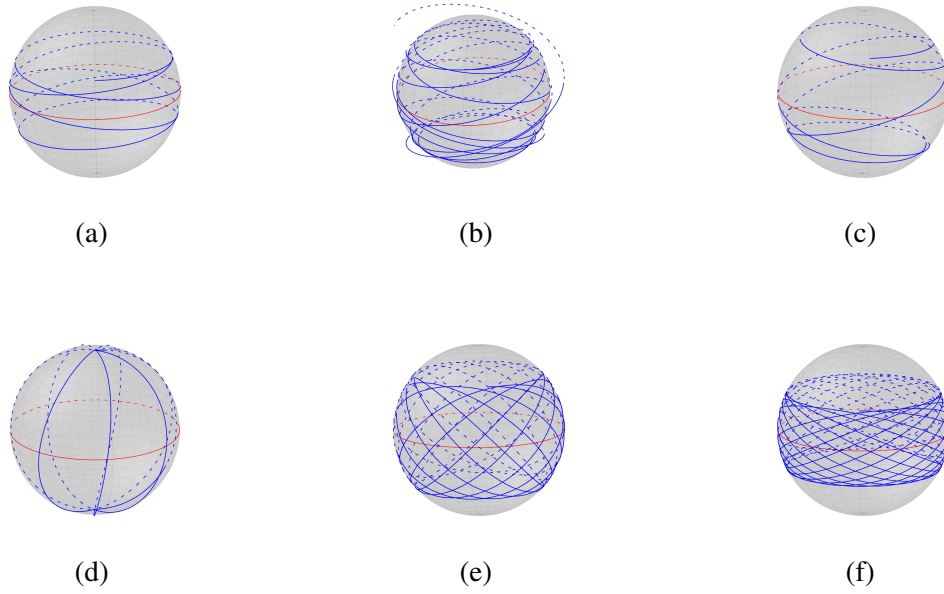


Figura 21: Exemple de orbite sferice. Traectoriile reprezentate în panourile (b) și (c) sunt instabile, pe când celelalte sunt stabile. Parametrii utilizați sunt enumerați în tabelul 1. S-a considerat $M = 1$.

4.3. Concluzii la capitolul 4

Pentru a studia efectul chintesenței asupra mișcării particulelor în jurul unei găuri negre aflate în rotație, a fost utilizată metrica propusă în lucrarea [35]. Chintesența conduce la apariția unui orizont cosmologic, mișcarea particulelor fiind restrânsă la intervalul $r \in (r_+, r_q)$, unde r_+ este orizontul găurii negre, iar r_q este orizontul cosmologic.

Este bine cunoscut faptul că metrica Kerr admite o valoare maximă a parametrului de spin, $a_{\max} = M$, în timp ce prezența chintesenței conduce la valoarea maximă $a_c = 2M/\sqrt{3} > M$. De asemenea, există o valoare critică a parametrului de chintesență $k_c = 1/(6M)$, pentru care parametrul de spin atinge valoarea maximă.

O atenție deosebită a fost acordată orbitelor sferice, datorită importanței lor astrofizice. Energia E și constanta Carter Q au fost parametrizate în funcție de momentul cinetic L_z și de raza orbitei sferice r_0 . S-a observat că atât energia, cât și constanta Carter scad odată cu creșterea lui k , pentru o valoare dată a lui r_0 . De asemenea, pe măsură ce k crește, latitudinea maximă a orbitelor sferice scade, acestea apropiindu-se de planul ecuatorial. Pentru anumite valori ale lui k , constanta Carter devine nulă, iar mișcarea este limitată la planul ecuatorial.

Efectul chintesenței a fost evidențiat și în cazul stabilității orbitelor sferice; zona în care sunt permise orbitele sferice stabile se restrânge semnificativ odată cu creșterea lui k . Un rezultat notabil este acela că, în prezența chintesenței, orbitele retrograde pot deveni prograde, spre deosebire de cazul Kerr, unde orbitele cu $L_z < 0$ rămân întotdeauna retrograde.

Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în lucrarea [37]. De asemenea, o analiză a traectoriilor sferice ale fotonilor în jurul găurii negre Kerr înconjurată de chintesență a fost publicată în lucrarea [38].

Concluzii generale

Deoarece fiecare capitol se încheie cu o scurtă secțiune de concluzii, în continuare sunt enumerate succint rezultatele semnificative care au fost publicate în reviste cotate ISI.

În această teză, soluția propusă de Kiselev a fost generalizată la cazurile complexe ale unor găuri negre încărcate electric sau magnetizate, statice sau în rotație. O caracteristică importantă a geometriei Kiselev o reprezintă existența a două orizonturi distincte: un orizont al găurii negre și un orizont de tip cosmologic.

Un rezultat remarcabil este și reinterpretarea geometriei Kiselev în cadrul electrodinamicii neliniare de tip power–Maxwell, unde s-a reobținut metrica Kiselev ca soluție exactă a ecuațiilor Einstein cuplate la un câmp electromagnetic neliniar [14]. În acest context, parametrul ce caracterizează chintesenta poate fi legat direct de sarcina electrică sau magnetică a găurii negre.

Prezența chintesentei modifică forma potențialului efectiv și afectează existența și stabilitatea orbitelor. În particular, s-a observat o creștere a razei orbitei ISCO, atât pentru particulele neutre, cât și pentru cele încărcate electric.

Un caz deosebit este cel al geometriei generate de un monopol magnetic, în prezența chintesentei. Așa cum era de așteptat, dinamica particulelor încărcate prezintă o proprietate remarcabilă, traiectoriile fiind constrânse să evolueze pe așa-numitele conuri Poincaré. S-a pus în evidență faptul că unghiul de deschidere al conului depinde nu doar de sarcina particulei-test, ci și de valoarea parametrului de chintesentă.

Un alt studiu realizat s-a concentrat asupra dinamicii particulelor încărcate electric în jurul unei găuri negre de tip Kiselev, încărcată electric și înconjurată de un fluid de chintesentă care este și o sursă a câmpului electromagnetic [22]. Interacțiunea electrică dintre particulă și gaura neagră conduce la deformarea orbitelor legate, într-un mod analog situației întâlnite în spațiul-timp Reissner–Nordström–de Sitter. În plus, analiza avansului de periastru pentru orbitele cvasicirculare a arătat că, deși în cazul particulelor neutre deplasarea periastrului este întotdeauna progradă, pentru particulele încărcate electric, prezența chintesentei poate induce o deplasare retrogradă a periastrului. Acest rezultat, împreună cu influența chintesentei asupra umbrei găurii negre, are consecințe astrofizice importante.

O altă extensie a modelului a fost realizată prin considerarea unei găuri negre de tip Kiselev înconjurată de un câmp magnetic [25, 26, 27]. Prin utilizarea tehnicilor de generare a soluțiilor pentru ecuațiile Einstein–Maxwell, a fost obținută o soluție magnetizată nouă care descrie o gaură neagră înconjurată de un fluid anizotrop de tip chintesentă și plasată într-un câmp magnetic poloidal. Pentru un câmp magnetic slab care nu afectează geometria spațiului-timp, dinamica particulelor încărcate este influențată semnificativ de prezența forței Lorentz. Prezența chintesentei se manifestă ca o forță repulsivă suplimentară. În plus, parametrul de chintesentă limitează superior domeniul de existență a orbitelor stabile. În apropierea orbitelor circulare stabile, mișcarea particulelor prezintă oscilații radiale și longitudinale cvasi-armonice, iar traiectoriile rezultate au forme trochoidale, caracteristice mișcării particulelor încărcate în câmpuri magnetice.

Un rezultat important îl constituie analiza frecvențelor epicyclice asociate oscilațiilor radiale și verticale ale particulelor, în vecinătatea orbitelor circulare stabile. S-a arătat că atât câmpul magnetic extern, cât și parametrul de chintesentă modifică semnificativ aceste frecvențe, ceea ce poate conduce la efecte observabile în spectrele oscilațiilor cvasi-periodice din discurile de acreție ale găurilor negre. În regimul câmpului magnetic slab, se pot obține soluții analitice ale ecuațiilor de mișcare, exprimate prin funcții Mathieu, ceea ce oferă posibilitatea unui studiu mai aprofundat al stabilității. Ca rezultat important, s-a observat că, în prezența chintesentei, orbitele circulare devin instabile față de planul ecuatorial.

Ultima parte a tezei este dedicată geodezicelor particulelor-test în jurul unei găuri negre de tip Kerr, înconjurată de chintesență [37, 38]. Prezența chintesenței introduce modificări semnificative în structura metricii și conduce la o structură mai complexă a orizonturilor. În funcție de valorile parametrilor modelului, pot apărea trei orizonturi distincte: orizontul interior, orizontul exterior al găurii negre și un orizont cosmologic.

O atenție deosebită a fost acordată orbitelor sferice, caracterizate printr-o rază constantă. S-a evidențiat faptul că parametrul de chintesență influențează în mod semnificativ poziția și stabilitatea acestor orbite, creșterea parametrului k conducând la destabilizarea lor. În plus, chintesența conduce la o creștere a numărului de revoluții pentru fiecare oscilație în latitudine și la o scădere a latitudinii maxime, orbitele apropiindu-se de planul ecuatorial. De asemenea, în prezența chintesenței, orbitele retrograde pot deveni prograde.

Bibliografie selectivă

- [1] B. P. Abbott et al. *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters, 116, 061102, 2016.
- [2] K. Akiyama et al. [Event Horizon Telescope]. *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*. Astrophysical Journal Letters, 875, L1, 2019.
- [3] A. Cattaneo et al. *The role of black holes in galaxy formation and evolution*. Nature, 460, 213, 2009.
- [4] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.
- [5] S. L. Shapiro. *Accretion onto Black Holes: the Emergent Radiation Spectrum*. Astrophysical Journal, 180, 531, 1973.
- [6] F. Melia. *The Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric*. Modern Physics Letters A, 37 (3), 2250016, 2022.
- [7] A. G. Riess et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. The Astronomical Journal, 116 (3), 1009, 1998.
- [8] D. N. Spergel et al. *First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters*. The Astrophysical Journal Supplement Series, 148 (1), 175–194, 2003.
- [9] R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt. *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State*. Physical Review Letters, 80 (8), 1582, 1998.
- [10] F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez and E. Ramírez. *Quintessence-like dark matter in spiral galaxies*. Revista Mexicana de Física, 49 (3), 203–206, 2003.
- [11] V. V. Kiselev. *Quintessence and black holes*. Classical and Quantum Gravity, 20 (6), 1187, 2003.
- [12] Z. Stuchlík and J. Vrba. *Epicyclic Oscillations around Simpson–Visser Regular Black Holes and Wormholes*. Universe 7 (8), 279, 2021.
- [13] S. Hod. *Lower bound on the radii of black-hole shadows*. Physical Review D, 113 (2), 024064, 2026.
- [14] M.A. Dariescu, C. Dariescu, V. Lungu and C. Stelea. *Kiselev solution in power-Maxwell electrodynamics*. Physical Review D, 106 (6), 064017, 2022.
- [15] M. A. Dariescu, V. Lungu, C. Dariescu and C. Stelea. *Charged particles in the background of the Kiselev solution in power-Maxwell electrodynamics*. Physical Review D, 109 (1), 024021, 2024.
- [16] M. Hassaine and C. Martínez. *Higher-dimensional charged black hole solutions with a nonlinear electrodynamics source*. Classical and Quantum Gravity, 25 (19), 195023, 2008.
- [17] S. Grunau and V. Kagramanova. *Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner–Nordström space-time: analytical solutions*. Physical Review D, 83 (4), 044009, 2011.
- [18] Y. Mino. *Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole*. Physical Review D, 67 (8), 084027, 2003.

- [19] B. Carter. *Global structure of the Kerr family of gravitational fields*. Physical Review, 174, 1559, 1968.
- [20] H. Poincaré. *Remarques sur une expérience de M. Birkeland*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 123, 530, 1896.
- [21] V. Lungu, M. A. Dariescu and C. Stelea. *Charged particles moving around a spherically symmetric dilatonic black hole*. Advances in High Energy Physics, 2024, 6666609, 2024.
- [22] V. Lungu, M.A. Dariescu and C. Stelea. *Particle dynamics around an electrically charged Kiselev black hole embedded in quintessence*. Nuclear Physics B, 1025, 117415, 2026.
- [23] T. Harada, T. Igata, H. Saida and Y. Takamori. *General formulae for the periapsis shift of a quasi-circular orbit in static spherically symmetric spacetimes and the active gravitational mass density*. International Journal of Modern Physics D, 32 (15), 2350098, 2023.
- [24] F. J. Ernst. *Black holes in a magnetic universe*. Journal of Mathematical Physics, 17 (1), 54, 1976.
- [25] V. Lungu, M.A. Dariescu and C. Stelea. *Charged particles orbiting a magnetized black hole immersed in quintessential matter*. Physical Review D, 111 (6), 064014, 2025.
- [26] M.A. Dariescu and V. Lungu. *Epicyclic motion of charged particles around a weakly magnetized Kiselev black hole*. The European Physical Journal C, 86 (3), 296, 2026.
- [27] V. Lungu. *Null geodesics around a magnetized Kiselev black hole*. The European Physical Journal Plus, 140 (6), 493, 2025.
- [28] C. Stelea, M.A. Dariescu and C. Dariescu. *Charged black holes with dark halos*. Physics Letters B, 847, 138275, 2023.
- [29] V. Cardoso, K. Destounis, F. Duque, R.P. Macedo and A. Maselli. *Black holes in galaxies: environmental impact on gravitational-wave generation and propagation*. Physical Review D, 105 (6), L061501, 2022.
- [30] E.P. Esteban. *Geodesics in the Ernst metric*. Il Nuovo Cimento B, 79 (1), 76, 1984.
- [31] S.V. Dhurandhar and D.N. Sharma. *Null geodesics in the static Ernst space-time*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 16 (1), 99, 1983.
- [32] V.P. Frolov and A.A. Shoom. *Motion of charged particles near a weakly magnetized Schwarzschild black hole*. Physical Review D, 82 (8), 084034, 2010.
- [33] M. Kološ, Z. Stuchlík and A. Tursunov. *Quasi-harmonic oscillatory motion of charged particles around a Schwarzschild black hole immersed in a uniform magnetic field*. Classical and Quantum Gravity, 32 (16), 165009, 2015.
- [34] Y.K. Lim. *Motion of charged particles around a magnetized/electrified black hole*. Physical Review D, 91 (2), 024048, 2015.
- [35] B. Toshmatov, Z. Stuchlík and B. Ahmedov. *Rotating black hole solutions with quintessential energy*. The European Physical Journal Plus, 132 (2), 98, 2017.
- [36] N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford Univ. Press, 1947.
- [37] M.A. Dariescu and V. Lungu. *Spherical orbits around a Kerr black hole surrounded by quintessence*. The European Physical Journal Plus, 140 (6), 476, 2025.
- [38] M.A. Dariescu and V. Lungu. *Null geodesics around Kerr black holes surrounded by quintessence*. Modern Physics Letters A, 41 (6), 2550153, 2026.
- [39] E. Teo. *Spherical orbits around a Kerr black hole*. General Relativity and Gravitation, 53 (1), 10, 2021.

Contribuțiile proprii pe domeniul tezei

Lucrări publicate în reviste cotate ISI

1. M.A. Dariescu, C. Dariescu, **V. Lungu** and C. Stelea. *Kiselev solution in power-Maxwell Electrodynamics*. Physical Review D, 106 (6), 064017, 2022.
FI=5, AIS=1.081, 12 citări
2. **V. Lungu**, M.A. Dariescu. *Circular geodesics in Mannheim-Kazanas spacetime*. PROCEEDINGS OF THE ROMANIAN ACADEMY, Series A, 24 (1), 35-42, 2023.
FI=0.7, AIS=0.2, 1 citare
3. M. A. Dariescu, **V. Lungu**, C. Dariescu and C. Stelea. *Charged particles in the background of the Kiselev solution in power-Maxwell electrodynamics*. Physical Review D, 109 (1), 024021, 2024.
FI=5.3, AIS=0.994, 2 citări
4. **V. Lungu**, M. A. Dariescu, C. Stelea. *Charged particles moving around a spherically symmetric dilatonic black hole*. Advances in High Energy Physics, 2024, 6666609, 2024.
FI=1.1, AIS=0.289, 2 citări
5. **V. Lungu**, M.A. Dariescu, C. Stelea. *Charged particles orbiting a magnetized black hole immersed in quintessential matter*. Physical Review D, 111(6), 064014, 2025.
FI=5.3, AIS=0.858, 4 citări
6. M.A. Dariescu, **V. Lungu**. *Spherical orbits around a Kerr black hole surrounded by quintessence*. European Physical Journal Plus, 140 (6), 476, 2025.
FI=2.9, AIS=0.414, 1 citare
7. **V. Lungu**. *Null geodesics around a magnetized Kiselev black hole*. European Physical Journal Plus, 140 (6), 493, 2025.
FI=2.9, AIS=0.414, 1 citare
8. M.A. Dariescu, **V. Lungu**. *Null geodesics around Kerr black holes surrounded by quintessence*. Modern Physics Letters A, 41 (6), 2550153, 2026.
FI=1.5, AIS=0.227
9. M.A. Dariescu, **V. Lungu**. *Epicyclic motion of charged particles around a weakly magnetized Kiselev black hole*. European Physical Journal C, 86 (3), 296, 2026.
FI=4.9, AIS=0.859
10. **V. Lungu**, M.A. Dariescu, Cristian Stelea. *Particle dynamics around an electrically charged Kiselev black hole embedded in quintessence*. Nuclear Physics Section B, 1025, 117415, 2026.
FI=2.9, AIS=0.569

Total FI pe autor = 13.575

Total AIS = 5.905

Preprinturi pe ArXiv

1. Cristian Stelea, M.A. Dariescu, **V. Lungu**. *Accelerating charged and rotating black holes in scalar multipolar universes*. Arxiv preprint:2501.11807v4, 2025.

Prezentări orale la conferințe internaționale

1. **V. Lungu**. *Motion of test particles around a magnetized black hole surrounded by quintessence*. The Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity, 23-26 Sept 2025, Yerevan, Armenia.
2. **V. Lungu**. *Weakly Magnetized black holes embedded in quintessence*. The Universe at All Scales, 11-15 May 2026, Astana, Kazakhstan.

Prezentări orale la conferințe naționale

1. **V. Lungu**. *Mișcarea particulelor încărcate electric în spațiul-timp al unei găuri negre în electrodinamica neliniară de tip power-Maxwell*. Conferința Națională „Fizica și Tehnologiile Educaționale Moderne”, 20 mai 2023, Iași, România.
2. **V. Lungu**. *Dinamica particulelor încărcate în spațiu-timpul unei găuri negre cu chintesență înconjurată de un câmp electric/magnetic*. Conferința Națională „Fizica și Tehnologiile Educaționale Moderne”, 25 mai 2024, Iași, România.

Participări la școli

1. XVI Tonale Winter School on Cosmology, 3-9 Dec 2023, Passo del Tonale, Italia.
2. 12th Aegean Summer School on Cosmology, 9-14 Sept 2024, Apollonia, Sifnos, Grecia.