UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAȘI
FACULTATEA DE FIZICĂ
ȘCOALA DOCTORALĂ

SINTEZA TEZEI DE DOCTORAT

Comportamente neliniare în structuri materiale

Doctorand: Andreea Bianca Brumă
Coordonator științific: Prof. univ. dr. Maricel Agop

IAȘI
2026

Cuprins

Prezentare generală..... 3

Capitolul 1. Coerențe în dinamica sistemelor fizice (perspectivă multifractală) 7

Capitolul 2. Dinamici de eliberare a medicamentelor 11

Capitolul 3. Dinamica neliniară a aerosolilor atmosferici..... 15

Capitolul 4. Model de graf relațional pentru regimuri de tip superconductiv..... 19

Capitolul 5. Concluzii finale și direcții viitoare de cercetare 24

Concluzie..... 26

Structura fiecărui capitol de cercetare urmează aceeaşi linie: rolul capitolului, aparatul teoretic sau metodologic, rezultatele principale, contribuțiile originale, concluziile și direcțiile viitoare.

Prezentare generală

1. Tema și contextul cercetării

Aceasta teza de doctoratpornește de la o constatare generală: toate structurile dinnaturăpot fi asimilate unor sisteme complexe. Complexitatea se manifestă prin comportamente neliniare (instabilități, fenomene emergente și interacțiuni multiple etc) care acționează simultan la mai multe scări.

Modelele tradiționale, fundamentate pe ecuații diferențiale clasice și pe traiectorii netede, derivabile (metode liniare) devin insuficiente pentru descrierea sistemelor reale precum cele farmacocinetice, cele din dinamica atmosferică sau cele din fizica materiei condensate.Altfel spus, ele nu pot surprinde în mod satisfăcător haosul determinist, autoorganizarea, tranzițiile de fază sau apariția structurilor coerente.

Lucrarea propune o schimbare de paradigmă. Ipoteza derivabilității traiectoriilor este abandonată, iar dinamica este descrisă prin curbe continue, dar nederivabile, de tip fractal sau multifractal, în cadrul formalismului multifractal și al Teoriei relativității de scară. Același cadru este apoi aplicat în domenii care, la prima vedere, nu au nimic în comun: dinamica standard a mișcării, dinamica eliberării medicamentelor din sisteme polimerice, dinamica aerosolilor atmosferici și, în final, dinamici complexe ce implicăapariția unor regimuri de tip superconductiv într-un model de rețea relațională.

2. Motivația cercetarii

Motivația principală a cercetarii provine din necesitatea utilizării unui limbaj teoretic unitar pentru analiza dinamicii sistemelor complexe. În literatură există numeroase modele dezvoltate independent – modele empirice în farmacologie, modele numerice în dinamica atmosferică etc. –, dar ele rămân limitate la contexte specifice și nu oferă o viziune integratoare. Teza pornește de la ipoteza că **structurile matematice fundamentate pe multifractalitate pot constitui un limbaj universal al complexității**, capabil să descrie dinamica sistemelor fizice fundamentale, procesele de transport și difuzie în medii complexe, comportamentele emergente în sisteme colective și tranzițiile dintre regimuri dinamice.

Un al doilea element motivațional este caracterul interdisciplinar al temei. Aplicând același cadru în domenii diferite, lucrarea urmărește să arate universalitatea principiilor care guvernează sistemele complexe: difuzia medicamentelor poate fi interpretată ca proces multifractal, turbulența atmosferică poate fi descrisă prin aceleași mecanisme de tranziție între regimuri, iar superconductivitatea poate apărea ca fenomen emergent al organizării relaționale.

3. Cadrul teoretic: dependența de scară și dinamica multifractală

Conceptul central al lucrării este **dependența de rezoluția de scară a dinamicilor sistemelor complexe** . Atunci, din punct de vedere matematic, orice variabilă fizică este privită ca limita unei familii de funcții definite la diferite niveluri de rezoluție. Rezultă două regimuri fundamentale: regimul derivabil, corespunzător descrierii clasice la rezoluții finite și regimul nederivabil, corespunzător limitei de rezoluție zero, caracterizat prin comportament fractal și haotic. Interacțiunea dintre ele generează dinamica observată și explică apariția fenomenelor emergente.

Al doilea concept esențial este **autosimilaritatea** curbelor fractale: fiecare parte reflectă întregul, ceea ce conferă descrierii un caracter „holografic" – informația globală este codificată local. În acest cadru, coordonata spațială devine nederivabilă, viteza devine complexă (o parte derivabilă, deterministă și o parte nederivabilă, fractală), iar derivata clasică față de timp este înlocuită cu o **derivată covariantă de scară**. În varianta în care multifractalizarea se realizează prin procese stocastice de tip Markov, toate ecuațiile de mișcare se obțin prin înlocuirea derivatei clasice cu derivata covariantă de scara, în virtutea principiului covarianței de scară: legile fizicii rămân invariante nu doar la transformări spațio-temporale, ci și la schimbări ale rezoluției de scară.

Această perspectivă conduce la reinterpretări de fond: energia devine o mărime dependentă de scară, traiectoria unică este înlocuită de un ansamblu de traiectorii posibile, iar dinamica sistemului apare ca rezultat al unei organizări colective. Parametrii ecuațiilor de mișcare – masă, amortizare, rigiditate, coeficienți de difuzie – nu mai sunt simple proprietăți intrinseci, ci expresii ale interacțiunii dintre sistem și mediul său și ale tranziției dintre cele două regimuri.

4. Structura tezei și sursele publicate

Teza este construită în jurul rezultatelor unor articole științifice publicate, fiecare corespunzând unui capitol de cercetare, la care se adaugă introducerea și capitolul de concluzii finale. Originalitatea lucrării derivă din integrarea acestor rezultate într-un cadru teoretic unitar, din extinderea și corelarea lor între capitole și din dezvoltarea unei perspective interdisciplinare coerente. Tabelul de mai jos rezumă structura.

Cap.	Titlu (prescurtat)	Domeniu	Sursă publicată	Rol în teză
1	Coerențe în dinamica sistemelor fizice din perspectivă multifractală	Fizică teoretică	Entropy 25(8), 2023	Fundament conceptual
2	Dinamici de eliberare a medicamentelor	Farmacologie, sisteme polimer–medicament	Două lucrări în Bul. Inst. Politehnic Iași, vol. 68(72), nr. 4, 2022	Aplicativ
3	Dinamica neliniară a aerosolilor atmosferici la tranziția laminar–turbulent	Fizica atmosferei	Atmosphere, 2024 (DOI 10.3390/atmos15030366)	Aplicativ, cu validare experimentală
4	Model de graf relațional ponderat pentru regimuri de tip superconductiv	Materie condensată, rețele, fizică statistică	Axioms, 2026, 15(5)	Model fundamental emergent

Tabel 1. Structura capitolelor de cercetare (capitolul 5 sintetizează concluziile). Capitolul 2 se sprijină pe două lucrări din același număr al buletinului.

5. Obiective și contribuții originale

Obiectivul principal este dezvoltarea și validarea unui model teoretic unificat pentru sistemele complexe, bazat pe dinamica multifractală, pe dependența de rezoluția de scară și pe integrarea fenomenelor neliniare și emergente. Scopul este dublu: **teoretic** – formularea unui model general al dinamicii sistemelor complexe, independent de natura lor fizică – și **aplicativ** – validarea lui în farmacologie, atmosferă și sisteme relaționale. Teza nu este o simplă aplicare a unor modele existente, ci o reformulare conceptuală a modului în care sunt înțelese sistemele complexe. Contribuțiile originale, așa cum sunt sintetizate în introducere, sunt:

- dezvoltarea unui model multifractal unificat pentru sisteme complexe;
- introducerea dependenței de scară ca principiu fundamental;
- reinterpretarea proceselor de transport ca fenomene neliniare și emergente;
- aplicarea modelului în trei domenii distincte (fizică fundamentală, farmacologie, atmosferă);
- dezvoltarea unui model relațional pentru superconductivitate.

Ordinea capitolelor are o logică clară: primul stabilește instrumentele conceptuale și matematice, al doilea și al treilea le aplică unor sisteme concrete (polimeri încărcați cu medicament, respectiv atmosfera cu aerosoli și nori de gheață), iar al patrulea face un pas spre un nivel mai fundamental, în care transportul, coerența și geometria apar ele însele ca proprietăți emergente ale unei rețele de constrângeri.

6. Concepte-cheie

Pricipalele concepte utilizate in prezenta teza de doctorat sunt:

- **Curbă multifractală** – traiectorie continuă, dar nederivabilă, a cărei lungime crește nelimitat când rezoluția de scara scade; are dimensiune fractală unică (monofractal) sau mai multe dimensiuni fractale simultan (multifractal).
- **Rezoluție de scară (dt)** – nivelul de „zoom” la care este descris sistemul; variabilele fizice depind explicit de ea.
- **Viteză complexă** – combinație dintre o componentă derivabilă, deterministă, și una nederivabilă, fractală, care înlocuiește viteza clasică.
- **Spectrul de singularitate f(*α*)** – instrument care descrie ce dimensiuni fractale apar în dinamică și permite identificarea claselor de universalitate.
- **Comportament holografic** – proprietatea prin care informația despre întreg este conținută în fiecare parte, datorită autosimilarității.
- **Ecuația Riccati** – ecuație neliniară de ordinul întâi, legată de dinamica hamiltoniană; în capitolul 1 este mecanismul care aduce lagrangianul la forma de pătrat perfect.
- **Coerențe de tip Stoler** – structuri temporare de organizare (dublare de perioadă, cvasiperiodicitate, intermitență) care apar la tranziția spre haos.
- **Canale laminare** – regiuni de comportament cvasi-laminar dintr-un flux turbulent, identificate prin exponenți Lyapunov.
- **Percolare, coerență de fază, modul de helicitate** – conectivitatea la nivelul întregului sistem, ordinea fazelor pe distanțe lungi și, respectiv, rigiditatea acestei ordini (capitolul 4).

Capitolul 1. Coerențe în dinamica sistemelor fizice dintr-o perspectivă multifractală a mișcării

1.1. Rolul capitolului și ideea centrală

Primul capitol oferă fundamentul conceptual și matematic al întregii teze. El pornește de la observația că fizica modernă a descris tradițional dinamica sistemelor prin curbe continue și derivabile, în cadrul mecanicii clasice, al relativității generale etc, iar acumularea de evidențe a arătat limitele acestor modele pentru sisteme cu instabilități și fenomene emergente. Teoriile de scară propun descrieri de dinamici complexe prin traiectorii continue și nederivabile, cu structură fractală sau multifractală.

Formalismul a fost aplicat anterior într-o gamă largă de probleme: la scară microscopică (problema de tip Kepler, oscilatorul armonic, comportamentul elastic și plastic al materialelor) și la scară macroscopică (dinamica sistemului solar, expansiunea Universului, fenomene de transport și difuzie). Rezultatul original al capitolului este stabilirea unei **corespondențe între ecuația Schrödinger multifractală și ecuația oscilatorului amortizat**, cu implicații profunde pentru interpretarea energiei, a acțiunii și a măsurării.

1.2. Stadiul cercetărilor, obiective și ipoteze

Seprezintă pe scurt direcțiile active ale domeniului: introducerea fractalității și a haosului determinist de către Mandelbrot și integrarea lor în teoria relativității la scară; extinderea ecuației Schrödinger multifractale cu disipație, fluctuații stocastice și tranziții între regimuri; rolul ecuațiilor de tip Riccati în teoria controlului, în mecanica cuantică și în dinamica sistemelor disipative; structurile coerente temporare de tip Stoler care apar la tranzițiile dintre regimuri (dublarea de perioadă, intermitența, cvasiperiodicitatea); solitonii topologici de tip skyrmion, metrica Poincaré și mapările armonice; simetriile grupului SL(2,R). Sunt menționate și aplicațiile în medicină și biologie (semnale EEG și ECG, variabilitatea ritmului cardiac), farmacologie, știința materialelor și dinamica atmosferică.

Scopul capitolului este validarea unui cadru unificat al dinamicii sistemelor complexe, pornind de la corespondența dintre dinamica cuantico-multifractală și cea clasică disipativă. Obiectivelecapitolului vizează: fundamentarea dependenței de scară; analogia Schrödinger multifractală – oscilator amortizat;rolul ecuațiilor Riccati în reconstrucția structurii hamiltoniene a sistemelor disipative; identificarea coerențelor de tip Stoler ca indicatori ai tranzițiilor între regimuri; integrarea conceptelor geometrice și topologice (mapări armonice, skyrmioni); extinderea către aplicații interdisciplinare, în special biomedicale.

Ipoteza generală susține că dinamica sistemelor complexe poate fi descrisă unitar printr-un formalism multifractal dependent de scară, în care tranzițiile dintre regimuri sunt guvernate de

ecuații neliniare și de structuri geometrice și topologice emergente. Ipotezelespecifice detaliază acest lucru: transformarea formală a ecuației Schrödinger multifractale într-un oscilator amortizat; rolul mecanismului Riccati; apariția naturală a coerențelor Stoler; interpretarea parametrilor fizici ca reflectări ale interacțiunii cu mediul; utilizarea skyrmionilor pentru configurații stabile; descrierea unitară a tranziției laminar–turbulent, a haosului și a autoorganizării; extinderea către sisteme biologice și procese de transport. Metodele folosite sunt analitice, numerice, analize de stabilitate și bifurcație și instrumente de analiză spectrală (transformata Fourier rapidă).

1.3. De la ecuația Schrödinger multifractală la oscilatorul amortizat

Se pornește de la ecuația Schrödinger multifractală pentru un potențial scalar constant, în care coordonata spațială este nederivabilă, timpul este derivabil și joacă rol de parametru afin, iar rezoluția de scară intervine prin factorul $(dt)^{(2/f(\alpha))-1}$ (dt este rezoluția de scară, f(α Introducând un ansatz liniar în coordonate și timp, cu unitatea imaginară în termenul temporal, ecuația lui Schrödinger, prin substituții adecvate (explicitate în teză), se reduce formal la ecuația unui oscilator armonic amortizat:

$$M\cdot(d^2q/dt^2) + 2R\cdot(dq/dt) + K\cdot q = 0 \qquad (1)$$

Corespondența nu este doar formală. Se preferă oscilatorul amortizat tocmai pentru că parametrii săi au avut întotdeauna o interpretare explicită în termeni de interacțiune: R este coeficientul de amortizare, care descrie forța disipativă proporțională cu viteza; K, rigiditatea elastică, este de obicei considerată proprietate intrinsecă, dar reflectă de fapt structura „universului local” din care oscilatorul face parte; M, masa inerțială, exprimă condițiile globale ale existenței materiei. Analiza oscilatorului devine astfel un instrument eficient pentru investigarea dinamicii sistemelor multifractale.

1.4. Energie, acțiune și ecuația Riccati

Sistemul de ordinul întâi asociat oscilatorului nu este hamiltonian, deoarece matricea sa nu are urmă nulă. Totuși, forma pătratică în coordonată și impuls care joacă rolul energiei poate fi legată de **rata de variație a acțiunii fizice**, definită ca arie elementară în planul de fază. Concluzia este că energia nu trebuie neapărat să fie conservată pentru a fi considerată rata unei acțiuni; este suficient ca acțiunea să fie definită adecvat. Relația conduce la o ecuație de tip Riccati pentru marimea $\omega = (dq/dt)/q$:

$$M\cdot(d\omega/dt) + M\cdot\omega^2 + 2R\cdot\omega + K = 0 \qquad (2)$$

Soluția acestei ecuații este raportul soluțiilor sistemului hamiltonian asociat – o proprietate generală a legăturii dintre ecuațiile Riccati și dinamica hamiltoniană, bine cunoscută în teoria controlului. Prin integrare se obține o lege de conservare mai complexă decât cea clasică:

energia în sens clasic se conservă doar dacă amortizarea este nulă sau dacă mișcarea în planul de fază are loc pe o dreaptă prin origine cu o pantă determinată de raportul dintre amortizare și masă. Prin urmare, energia devine un indicator al transformărilor interne ale sistemului și al interacțiunilor sale cu mediul.

1.5. Lagrangianul măsurării și coerențele multifractale de tip Stoler

Cea mai originală contribuție conceptuală a capitolului este reinterpretarea procesului de măsurare. Ecuația clasică de mișcare provine dintr-un principiu variațional asociat unui lagrangian cu parametri variabili în timp. Prin adăugarea unei derivate totale în timp – adică printr-o transformare de calibrare (gauge) – lagrangianul este adus la forma unui **pătrat perfect**, cu condiția ca funcția introdusă să satisfacă o ecuație de tip Riccati. Un lagrangian pătratic descrie o unitate fizică elementară, așa cum energia cinetică descrie particula liberă; el este interpretat ca „lagrangianul măsurării” și reprezintă un ansamblu de oscilatori de aceeași frecvență care evoluează hamiltonian în planul de fază.

Astfel, măsurarea nu mai este o operație externă sistemului, ci un proces intern de **modulație de frecvență**, în care diferența dintre energia cinetică și cea potențială este calibrată pentru a reflecta structura internă a sistemului. Soluția generală a ecuației Riccati se obține printr-o transformare omografică ce o reduce la o ecuație liniară de ordinul întâi, iar rezultatul are forma unei modulații de frecvență numite transformare de tip Stoler; de aici denumirea de **coerențe multifractale de tip Stoler**.

Reprezentările grafice ale soluției (Figura 1.1 din teză, calculate pentru pulsații caracteristice ω = 1; 1,42; 10 și 15 și pentru trei valori ale parametrului r: 0,1; 0,5 și 0,9) evidențiază patru regimuri dinamice: dublarea de perioadă, oscilațiile amortizate, cvasiperiodicitatea și intermitențele. Primele două comportamente pot fi verificate prin transformata Fourier rapidă. Aceste regimuri sunt etape intermediare în tranziția către haos și pot fi înțelese ca forme temporare de organizare, în care sistemul oscilează între ordine și dezordine. Importanța lor constă în faptul că permit sistemelor complexe să mențină structuri stabile pe intervale finite de timp, în ciuda instabilităților interne; coerențele Stoler funcționează astfel ca „punți” între regimurile deterministe și cele haotice.

1.6. Legături cu alte teorii fizice: skyrmioni, metrica Poincaré, grupul SL(2,R)

Soluția Riccati conține o mărime complexă, notată h, care apare ca soluție a unor ecuații obținute prin **mapări armonice** ale metricii Poincaré. Prin aceasta, ansatz-ul folosit stabilește o corespondență cu **skyrmionii**, solitoni topologici introduși de Tony Skyrme pentru a descrie nucleonii. O mapare armonică se obține ca extremum al unui funcțional de energie; atunci când spațiul-țintă este sfera euclidiană, ecuația rezultată este liniară (ecuația lui Laplace) și nu poate

explica solitonii. De aceea funcționalul lui Skyrme conține și un termen de ordin superior, iar soluția statică clasică – „ansatz-ul arici" (hedgehog) – reprezintă un nucleon.

Rezultatele obtinute sunt in acord cu cele ale lui Atiyah și Sutcliffe (2004), care arată că teoria skyrmionilor euclidieni cu pioni masivi conduce la rezultate aproape identice cu cele obținute pentru skyrmionii hiperbolici fără masă. Este subliniat faptul că structura spațiului reapare într-o teorie aparent îndepărtată de relativitatea generală, iar ecuațiile lui Einstein în vid sunt echivalente cu principiul armonic asociat unei astfel de metrici. În cadrul multifractal, spațiul nu este un simplu fundal pasiv, ci devine un actor activ în dinamica sistemului.

Un al doilea fir de legătură este simetria. Ecuația Schrödinger multifractală admite grupul **SL(2,R)**, ale cărui generatori satisfac relațiile standard de comutație. Acțiunea omografică a grupului asupra spațiului stărilor conduce, prin condiția de constanță a parametrului transformat, tot la o ecuație de tip Riccati, iar geodezicele metricii absolute se reduc la metrica Poincaré. Un transport paralel de tip Levi-Civita permite scrierea metricii ca sumă de pătrate perfecte, de unde se poate construi o teorie hamiltoniană în sensul calibrării Riccati. Se realizează astfel o legătură profundă între simetrie, geometrie și dinamică, cu un rol practic: identificarea invarianților mișcării și facilitarea integrării ecuațiilor de evoluție.

1.7. Contribuții, concluzii și perspective

Capitolul concluzionează că teoria relativității la scară oferă un cadru robust pentru sisteme complexe, integrând coerent dinamica multifractală, dependența de scară, analogia dintre modele cuantice și clasice, reinterpretarea energiei, acțiunii și măsurării, coerențele de tip Stoler, rolul transformărilor Riccati, conexiunile cu structurile topologice de tip skyrmion și simetriile grupului SL(2,R). Rezultatul central este evidențierea coerențelor multifractale de tip Stoler, care apar la orice rezoluție de scară ca soluții ale ecuațiilor Riccati asociate transformărilor de calibrare și reflectă comportament organizat într-o dinamică aparent haotică. Ecuațiile Riccati mai introduc și un mecanism de control al dinamicii, asemănător celor din teoria controlului optim, prin care anumite regimuri pot fi stabilizate sau amplificate.

Direcțiile de continuare sunt: metode numerice pentru simularea dinamicii multifractale; integrarea formalismului în modele biomedicale (analiza semnalelor fiziologice, procese de reabilitare); explorarea conexiunilor cu teoriile cuantice și gravitaționale; folosirea conceptelor de coerență și simetrie pentru controlul sistemelor complexe; și dezvoltarea unor noi indicatori de complexitate utili în analiza datelor experimentale și în optimizarea proceselor tehnologice.

Capitolul 2. Dinamici de eliberare a medicamentelor dintr-o perspectivă multifractală a mișcării

2.1. Problema abordată

În farmacocinetica standard, dinamica eliberării medicamentului este descrisă prin modele semiempirice – Higuchi, Hixson–Crowell, modelul de ordinul I, Korsmeyer–Peppas etc. Toate folosesc funcții derivabile și integrabile, ceea ce le dă simplitate matematică și ușurință în aplicare. Ele sunt însă adecvate doar pentru descrieri aproximative: nu pot surprinde comportamentele neliniare complexe, efectele de haos și instabilitate sau interacțiunile multiscalare din sistemele reale. Comportamentul polimerilor este influențat de condițiile de fabricație și de utilizare, iar neliniaritatea și caracterul haotic al dinamicii lor sunt atât structurale, cât și funcționale, determinate de interacțiuni interne.

Capitolul propune o descriere alternativă, bazată pe teoriile de scară. Sistemul polimer–medicament este considerat un sistem complex ale cărui unități structurale evoluează pe curbe multifractale, iar variabilele fizice devin variabile multifractale, dependente simultan de timp, spațiu și scară. Perspectiva permite tratarea unor fenomene precum difuzia neclasică, transportul neliniar și autoorganizarea structurilor interne.

Scop și rezultate urmărite. Scopul este un model teoretic avansat pentru sisteme complexe de tip polimer–medicament, care să depășească limitele modelelor farmacocinetice clasice și să coreleze parametrii structurali și funcționali ai sistemului cu dinamica eliberării, folosind dependența de scară, dinamica multifractală și modelarea probabilistică. Capitolul urmărește: un model teoretic coerent și generalizabil; evidențierea mecanismelor fundamentale ale eliberării; integrarea fenomenelor neliniare și haotice într-un cadru matematic riguros; instrumente analitice și numerice; și noi direcții de cercetare în domeniul farmacologic și biomedical.

2.2. Sistemul polimer–medicament ca „multifractal”

Ipoteza fundamentală a modelului este că sistemul polimer–medicament este, structural și funcțional, un multifractal („multifractalul polimer–medicament”). Din ea decurg mai multe consecințe:

- orice curbă continuă, dar nederivabilă, care descrie dinamica entităților depinde explicit de rezoluția de scară; lungimea ei tinde la infinit când rezoluția tinde la zero, iar curba este autosimilară în fiecare punct, echivalent cu proprietatea holografică;
- dinamica este determinată de o familie de funcții obținute prin „zoom” asupra rezoluției de scară, iar rezoluția este identificată cu timpul obișnuit (principiul substituției);

- variabilele sunt multifractale, adică depind simultan de coordonatele spațio-temporale și de rezoluție, și admit două derivate: una „înainte” (procese de eliberare) și una „înapoi”;
- deplasarea se descompune într-o parte derivabilă, independentă de scară, și una nederivabilă, dependentă de scară, care satisface o ecuație multifractală cu coeficienți asociați tranziției derivabil–nederivabil; spectrul de singularitate f(α) permite identificarea claselor de universalitate, chiar dacă atractorii au aspecte diferite;
- invarianța la reflexia temporală este restaurată prin combinarea derivatelor înainte și înapoi într-un operator complex (teorema lui Cresson), ceea ce conduce la **viteza complexă**: partea reală este derivabilă și independentă de scară, cea imaginară este nederivabilă și dependentă de scară;
- numărul infinit de curbe multifractale care leagă două puncte impune „multifractalizarea prin stochasticizare”, astfel încât mediile, variațele și corelațiile proceselor stocastice pot fi folosite pentru dinamica polimer–medicament.

2.3. Derivata covariantă la scară și legile de conservare

Dezvoltând în serie Taylor până la ordinul al doilea și mediind, se ajunge la operatorul derivată covariantă la scară prezentat în prezentarea generală (explicitate in teza). Forma lui exactă depinde de tipul de proces stochastic (explicitate in teza): pentru procese de tip **Markov** apare un singur coeficient λ, iar pentru procese **non-Markov** doi coeficienți (μ și σ) asociați tranzițiilor derivabil–nederivabil. Pe baza principiului covarianței la scară, derivata clasică este înlocuită cu operatorul derivate covarianta în toate ecuațiile fundamentale.

Aplicat vitezei complexe, operatorul derivata covarianta (pe baza unui principiu de miscare) dă ecuațiile de tip geodezic, care exprimă conservarea impulsului specific. Separarea lor pe rezoluții de scară arată că, la scară derivabilă, asupra sistemului acționează o **forță multifractală specifică**, indusă de câmpurile de viteză de la scară nederivabilă. O dinamică pur monofractală corespunde restricției $f(\alpha) \equiv D_F$ (adica spectrul de singularitate f(α) implica doar o singura dimensiune fractala D_F).

2.4. Implementarea „holografică”: de la Schrödinger la Fokker–Planck

Se alege un câmp de viteze de forma $\hat{V} = -2iD\,\partial \ln \psi$, unde ψ este funcția de stare a sistemului, iar D este un coeficient dependent de rezoluție. Legea de conservare a impulsului specific implică atunci o ecuație de tip Schrödinger multifractală pentru ψ. Scriind $\psi = \sqrt{\rho} \cdot \exp(iS)$, cu ρ amplitudinea (densitatea) și S faza, câmpul de viteze se separă în componenta derivabilă și cea nederivabilă și se obține totodată legea de conservare a densității de probabilitate.

Introducând câmpuri de viteză pentru procesele „înainte” și „înapoi”, rezultă simultan două ecuații multifractale de tip **Fokker–Planck**. Ecuatia „înainte” își găsește corespondent fizic

în procesele standard de difuzie (de exemplu pentru dinamici pe curbe de tip Peano, cu $D_F = 2$); cea „înapoi” nu are un asemenea corespondent, fiind legată de dinamicile de tip Nelson. Aici intervine caracterul „holografic”: dinamica globală a sistemului poate fi dedusă din comportamentul local al traiectoriilor fractale, iar densitatea de probabilitate ρ este o mărime multifractală invariantă atât la transformări spațiale și temporale, cât și la schimbări ale rezoluției de scară. Pentru o eliberare unidirecțională a medicamentului, ecuația devine:

$$\partial\rho/\partial t + \partial(V\rho)/\partial x - D\cdot\partial^2\rho/\partial x^2 = 0, \quad D = \lambda(dt)^{(2/f(\alpha))-1} \tag{3}$$

unde V este viteza curentului de densitate de probabilitate fractală, iar D este coeficientul asociat tranziției multifractal–nemultifractal, legat de dimensiunile fractale ale curbelor de eliberare.

2.5. Soluții și rezultate

Ecuația admite soluții analitice doar în cazuri particulare, cu simetrii speciale și condiții inițiale sau la limită adecvate. Pentru orice rezoluție de scară, dacă viteza este liniară în coordonată, $V = -\eta x$, cu η constantă, integrarea conduce la o soluție explicita pentru ρ(x, t). Prin trecerea la variabile adimensionale ($\tau = \eta t$ și o coordonată fractală redusă ξ) se obține densitatea ρ(ξ, τ), reprezentată tridimensional și ca hartă de contur (Figura 2.1 din teză).

Deoarece ρ depinde simultan de o variabilă spațială și una temporală, pot fi realizate diverse izometrii, precum inversia variabilelor sau compactificarea dimensiunilor. Figura 2.2 din teza prezintă densitatea în funcție de τ pentru diferite valori ale lui ξ, obținută prin inversia coordonatei spațiale cu cea temporală. Această **izometrie ξ → τ** poate genera multiple regimuri dinamice neliniare și, implicit, comportamente neliniare în procesele de eliberare. Sespecifică similaritatea cu diverse date experimentale, ceea ce indică faptul că o descriere calitativă a evoluției proceselor de eliberare poate fi realizată cu ajutorul modelului teoretic; comparația este, așadar, de natură calitativă, nu una cantitativă pe date proprii.

2.6. Contribuții originale și concluzii

Contribuțiile capitolului sunt prezentate ca fiind următoarele:

- un **model unificat** bazat pe teoria relativității la scară, în care sistemul polimer–medicament este multifractal structural și funcțional, cu variabile dependente de scară și cu tranziția derivabil–nederivabil introdusă explicit;
- **abandonarea ipotezei derivabilității** în descrierea eliberării medicamentului, ceea ce permite integrarea haosului și a instabilității, descrierea difuziei anormale și explicarea comportamentelor emergente;

- utilizarea **operatorului covariant la scară** și a vitezei complexe (componentă deterministă plus componentă stocastică), cu multifractalizare prin procese Markov și non-Markov, ceea ce face posibilă folosirea instrumentelor statistice;
- folosirea **ecuațiilor Fokker–Planck fractale** pentru densitatea de probabilitate, considerată invariantă la scară, cu evidențierea regimurilor dinamice prin soluții analitice particulare;
- conceptul de **comportament holografic**, prin care dinamica globală se deduce din cea locală, folosind autosimilaritatea curbelor fractale;
- corelarea dintre **gradul de fractalitate** al traiectoriilor și eficiența eliberării, cu potențial pentru cuantificarea complexității, identificarea parametrilor optimi de proiectare și optimizarea formelor farmaceutice.

În concluzie, descrierea standard prin funcții continue și derivabile este abandonată, iar teoria relativității la scară este prezentată ca modelul compatibil cu descrierea prin funcții continue, dar nederivabile. Se propune o soluție particulară a ecuației de difuzie multifractală și se arată că izometria de inversie a coordonatelor fractale generează multiple regimuri neliniare.

2.7. Direcții viitoare

Se consideră că modelul are nevoie de extinderi și validări pentru a deveni un instrument standard. Direcțiile enumerate sunt: integrarea metodelor de inteligență artificială (învățare automată pentru identificarea tiparelor dinamice, estimarea automată a parametrilor multifractali, clasificarea regimurilor pe date experimentale); aplicarea în optimizarea sistemelor de eliberare controlată, în proiectarea unor profiluri de eliberare personalizate și în corelarea parametrilor structurali cu eficiența terapeutică, în special prin legătura dintre dimensiunea fractală și dinamica eliberării; extinderea către semnale fiziologice (EEG, ECG), procese de recuperare și variabilitate biologică; formularea riguroasă a proprietăților holografice; **validarea experimentală**, prin compararea rezultatelor teoretice cu date reale și dezvoltarea unor protocoale de măsurare; și extinderea către știința materialelor, fizica mediilor complexe și chiar sisteme sociale și economice.

Capitolul 3. Investigarea dinamicii neliniare în aerosolii atmosferici în timpul tranziției de la fluxul laminar la cel turbulent

3.1. Contextul: aerosoli, nori de gheață și turbulență

Aerosolii atmosferici influențează direct bilanțul radiativ al atmosferei și ciclurile climatice globale. Ei acționează ca nuclee de condensare pentru particulele de nor, iar creșterea concentrației lor modifică proprietățile microfizice, optice și radiative ale norilor; la rândul lor, norii și precipitațiile îndepărtează aerosolii din atmosferă (eliminare umedă). Cu toate acestea, influența aerosolilor asupra proceselor atmosferice globale nu a fost pe deplin investigată. Modelele lor sunt variate și complexe, din cauza proprietăților fizico-chimice ale aerosolilor, a interacțiunii cu apa în cele trei stări de agregare și a interacțiunii cu radiația solară. Ecuațiile diferențiale neliniare implicate fac dificilă obținerea de soluții analitice, astfel că se preferă metodele computaționale.

Teoria relativității la scară oferă o alternativă, fie pentru dinamici atmosferice **monofractale** (o singură dimensiune fractală), fie **multifractale** (mai multe dimensiuni fractale simultan). Cercetarile anterioare în domeniuau evidențiat următoarele: un model β pentru generarea și analiza turbulenței atmosferice, o metodă computațională pentru determinarea stratului limită planetar și a proprietăților sale și o metodă de identificare a turbulenței atmosferice prin **canale laminare**. Capitolul aplică aceste mecanisme dinamicii norilor de gheață (cirrus): nori de altitudine mare, formați din cristale de gheață, care reflectă radiația solară incidentă, dar captează și căldura emisă de Pământ, contribuind la efectul de seră. Modelarea lor corectă este esențială pentru climă, prognoză meteorologică și aviație.

Progresele recente în studiul dinamicii atmosferice se bazează pe integrarea metodelor teoretice cu instrumente de teledetecție – ceilometre (lidar), radare Doppler și sisteme de reflectivitate radar –, care oferă date detaliate despre structura și evoluția aerosolilor și sunt esențiale pentru validarea modelelor și pentru identificarea unor structuri dinamice precum canalele laminare sau regiunile de instabilitate. Exponenții Lyapunov și analizele de bifurcație permit caracterizarea regimurilor dinamice și identificarea tranzițiilor către haos. Capitolul urmărește un model multifractal al dinamicii atmosferice, identificarea mecanismelor care guvernează tranzițiile dinamice și corelarea rezultatelor teoretice cu datele experimentale: prima parte prezintă modelul teoretic, a doua – rezultatele obținute pe date de reflectivitate radar și ceilometru.

3.2. Modelul teoretic

Atmosfera este acceptată ca obiect multifractal, structural și funcțional, iar dinamicile unităților sale structurale sunt descrise prin curbe continue, dar nederivabile, cu ajutorul derivatei covariante la scară. Utilizarea spectrului de singularitate f(α) are avantaje clare: o dimensiune fractală dominantă poate evidenția un tipar atmosferic global; un set de dimensiuni permite identificarea unor tipare zonale; iar clasele de universalitate pot fi identificate chiar dacă atractorii asociați arată diferit. Multifractalizarea prin procese stocastice de tip Markov și non-Markov conduce la două forme ale operatorului, cu coeficienți de tip difuziv.

Aplicând operatorul densității de stare și separând legea de conservare pe rezoluții de scară (derivabilă și nederivabilă), se obține prin însumare legea de conservare asociată **tranziției de la scale multifractale la scale nemultifractale**. Câmpul de viteză asociat acestei tranziții este identificat cu **rata de depunere**a aerosolilor. Ideea-cheie a capitolului este deci că tranziția turbulență–laminar poate fi interpretată ca o tranziție de scară multifractal–nemultifractal. Pentru o viteză de tranziție constantă pe direcția verticală, ecuația devine unidimensională:

$$\partial\rho/\partial t + V\cdot\partial\rho/\partial z - D\cdot\partial^2\rho/\partial z^2 = 0 \qquad (4)$$

Aici ρ este densitatea de aerosoli, V este viteza de tranziție (rata de depunere), iar D este un coeficient de tip difuziv, care depinde de proprietățile geometrice și fizice ale aerosolilor, de caracteristicile atmosferei și de rezoluția de scară. Se impun condițiile $\rho(z, 0) = \rho_0$ = constant și $\rho(0, t) = 0$ (aerosolul este absorbit la suprafață). Prin schimbarea de variabilă care elimină termenul de transport, ecuația se reduce la o ecuație de difuzie pură; condiția la limită este eliminată extinzând domeniul la $z < 0$ cu o distribuție inițială impară, iar soluția se scrie printr-o integrală Fourier. Rezultatul final se exprimă cu ajutorul funcției eroare (erf).

Figurile 3.1 și 3.2 din teză ilustrează densitatea redusă și rata de depunere în coordonate adimensionale. Pentru V/D = 0,1 densitatea crește inițial cu înălțimea, la timpi mici, apoi scade; pentru V/D = 10 ea crește, apoi se stabilizează și rămâne constantă. Rata de depunere maximă este atinsă într-un interval mai scurt când viteza crește, dar pe intervale lungi comportamentul se poate inversa. Atât densitatea, cât și rata de depunere tind să se stabilizeze în spațiu și timp, iar această situație corespunde limitei dintre regimul turbulent și cel laminar, adică **canalelor de laminaritate**. Pentru rata de depunere se obțin două regimuri limită, delimitate de timpul caracteristic $t_e = 4D/V^2$:

$$I(t)/n_0 \approx (D/\pi t)^{1/2} + V/2 \;\; (t \ll t_e), \qquad I(t) = n_0 V \;\; (t \gg t_e), \qquad (5)$$

mărimile din ecuația de mai sus fiind explicitate în teză.

La timpi mici, rata de depunere este suma dintre depunerea difuzivă și jumătate din viteza de sedimentare pură; la timpi mari, mișcarea browniană nu mai contează, iar depunerea este dată

de viteza V. Pentru particule cu raza de 0,1 μm și 1 μm, în aer la 10^3 hPa și 293 K, cu densitatea particulei de 2 g/cm³, timpul t_e este de aproximativ 40 s, respectiv $4 \cdot 10^{-3}$ s. Autorii precizează și că, în realitate, atmosfera nu este în repaus, iar suprafața Pământului nu este un perete perfect: turbulența generează un flux ascendent de aerosoli care compensează sedimentarea.

3.3. Date experimentale și metodă

Pentru corelarea cu experimentul au fost folosite date de la un **ceilometru** CHM15k (lungime de undă 1064 nm) și de la un **radar Doppler** de nori RPG-FMCW-94-DP, în mod non-scanare, amplasate la facilitatea de cercetare UGAL-REXDAN din Galați (45,435° N, 28,037° E, 65 m altitudine). Alegerea și utilizarea instrumentelor respectă standardele comunității ACTRIS, iar datele provin din platforma Cloudnet. Calculele au fost realizate în Python 3.10.

Metodologia standard utilizată și în alte lucrări se referă la: determinarea**exponenților Lyapunov**, care măsoară divergența sau convergența traiectoriilor apropiateși sunt folosiți pentru a identifica regiuni de comportament laminar în fluxuri turbulente; ecuațiile multifractale de mișcare sunt aproximate logistic și combinate cu modele de tip gauge simplificate, pe ipoteza că parametrii atmosferici sunt funcții multifractale care suferă o rupere a simetriei de scară la fiecare etapă a cascadei turbulente;legătura dintre exponenții Lyapunov și canalele laminare se analizează prin diagrame de bifurcație și hărți logistice, care descriu dublarea perioadei și tranziția către haos. O noutate practică este utilizarea **datelor de reflectivitate radar**: ceilometrul devine inadecvat la altitudini mari în prezența norilor, din cauza saturării senzorului de lumină retroîmprăștiată, iar aplicațiile anterioare ale canalelor laminare se bazau exclusiv pe date de tip ceilometru sau lidar.

3.4. Rezultate: canale laminare în ziua de 4 februarie 2023

Cazul analizat este ziua de 4 februarie 2023 la Galați, cu o atmosferă dominată de particule mari de nori de gheață. Profilul canalelor laminare a fost studiat la patru momente (Figura 3.6 din teză):

- **ora 04:00** – canalele laminare descendente la altitudini joase descriu corect coborârea formațiunilor noroase. La altitudini mari apar canale ascendente de intensitate redusă; explicația este că vârful norului nu coboară, ci părăsește domeniul de detecție al radarului, deplasându-se ascendent într-o direcție inaccesibilă, și doar pare săcoboare. Analiza laminară ajută la distingerea acestor situații. Apar și benzi laminare anormale în regiunile superioare, corespunzătoare unor fluctuații și instabilități bruște la partea de sus a norului;
- **ora 12:00** – se așteaptă și se confirmă o stabilitate generală; nu se observă canale laminare semnificative;

- **ora 16:00** – stabilitatea este evidențiată atât de datele brute, cât și de analiza laminară, care indică totuși canale ascendente la altitudini mai mari, în acord cu o ușoară mișcare ascendentă reală a norului;
- **ora 20:00** – stabilitatea anticipată este confirmată.

Un tipar suplimentar: maximul care apare pe axa stadiului cascadei turbulente este întotdeauna asociat zonelor cu cel mai mare număr de corpuri de retroîmprăștiere. Un număr mare de stadii ale cascadei indică regiuni cu disipare foarte redusă, în care formațiunile noroase se disipă mai lent și densitatea cristalelor de gheață în suspensie crește. Analiza laminară poate evidenția, așadar, zonele profilului cu cea mai mare concentrație de gheață atmosferică. La ora 04:00 se observă un gradient semnificativ al vitezei particulelor de gheață la altitudini relativ joase, în corelație cu profilul de retroîmprăștiere crescut din datele de ceilometru și de radar, ceea ce concordă cu predicția modelului privind creșterea ratei de depunere în zona de tranziție laminar–turbulent.

3.5. Contribuții, concluzii și direcții viitoare

Contribuțiile originale ale capitolului sunt: reinterpretarea tranziției laminar–turbulent ca tranziție între scale multifractale și nemultifractale (regimul turbulent fiind asociat unei dinamici multifractale complexe, iar cel laminar unei structuri mai apropiate de monofractal); un model matematic al atmosferei ca sistem multifractal, cu coordonate dependente de scară și cu constante specifice tranziției; folosirea spectrului de singularitate pentru caracterizarea dinamicii atmosferice; multifractalizarea prin procese Markov și non-Markov; formularea legilor de conservare pe baza covarianței la scară; tratarea simultană a difuziei și depunerii, cu rezolvarea ecuației prin metode Fourier; validarea prin ceilometru, reflectivitate radar și viteză Doppler; și, în mod particular, **prima utilizare a datelor de reflectivitate radar** în analiza canalelor laminare.

Concluziile discută limitele rezultatelor. Laminaritatea completă este rar observată în datele de reflectivitate radar; predomină regimurile cvasi-laminare, deoarece radarul operează la lungimi de undă mai mari, iar „corpurile” de retroîmprăștiere sunt mai mari. La scări superioare celor ale aerosolilor, curgerea laminară poate lipsi sau poate avea efect diminuat asupra particulelor mari, precum apa atmosferică lichidă sau solidă, în concordanță cu teoria dinamicii haotice. Ceilometrele sunt în general inadecvate pentru mase noroase bogate în gheață, iar regiunile cu densitate mare de gheață corespund unui număr mare de stadii ale cascadei turbulente, deci unei disipări energetice reduse.

Direcțiile viitoare cuprind: extinderea modelului, formulat în esență unidimensional, la sisteme atmosferice tridimensionale; soluții analitice și studiul stabilității, inclusiv prin metode Riccati; modele stocastice avansate (procese non-Markov, fluctuații dependente de scară, corelații

spațio-temporale); metode numerice și simulări Monte Carlo; corelarea cu date de înaltă rezoluție (radar Doppler, ceilometre) și calibrarea modelului; analiza aprofundată a parametrilor critici ai tranziției laminar–turbulent; aplicații climatice și de mediu (schimbări climatice, transportul poluanților, interacțiuni aerosol–nor); și integrarea inteligenței artificiale pentru clasificarea regimurilor atmosferice.

Capitolul 4. Un model de graf relațional ponderat pentru regimuri emergente de tip superconductiv: structură Gibbs, percolare și coerență de fază

4.1. Fundamentelemodelului

Superconductivitatea este unul dintre cele mai remarcabile exemple de coerență macroscopică: sub o temperatură critică, rezistența electrică dispare, iar transportul este guvernat de o fază colectivă care se extinde asupra întregului sistem. În superconductoarele convenționale, fenomenul este explicat de teoria BCS, prin perechi Cooper mediate de vibrațiile rețelei cristaline. Superconductivitatea la temperaturi înalte, descoperită în oxizii de cupru stratificați, a rezistat însă unei teorii universal acceptate: corelațiile electronice puternice, dimensionalitatea redusă, inhomogenitatea spațială și excitațiile colective nu se integrează ușor în cadrele bazate pe cuplaj slab. Numeroasele modele propuse (legături de valență rezonante, împerechere mediată de fluctuații de spin, câmpuri de calibrare emergente, criticalitate cuantică) converg spre o idee comună: superconductivitatea apare mai degrabă ca **fenomen de organizare colectivă** decât ca rezultat al unei singure interacțiuni dominante.

De aici, o schimbare de întrebare: în loc să se caute mecanismul microscopic dintr-un material anume, se întreabă care sunt **condițiile minime, de natură structurală**, pentru ca superconductivitatea să apară. Capitolul testează dacă un comportament de tip superconductiv poate apărea ca fază a informației relaționale constrânse, fără a introduce electroni, fononi sau parametri de ordine microscopici.

4.2. Cadrul relațional–informațional

Modelul este o specializare a unui cadru axiomatic relațional–informațional (Buzea et al., Axioms, 2026, 15, 154). În acest cadru, obiectul primitiv este o configurație relațională G = (V, E, C): noduri, muchii orientate și ponderi nenegative ale constrângerilor, interpretate ca costuri informaționale aditive pe traseu. O acțiune informațională S, monotonă și aditivă, induce un ansamblu de tip Gibbs, $P \propto \exp(-\beta S)$. Geometria, forțele și spațiu-timpul efectiv apar ca structuri emergente: distanța este definită operațional prin costul minim cumulat al constrângerilor pe traseele admisibile, fără a presupune vreun spațiu-timp de fundal.

În capitolul de față, această structură este particularizată la un graf finit ponderat, cu spațiul de configurații $\Omega = \{0,1\}^E \times (S^1)^V$, adică un sistem Gibbs mixt, discret–compact. Parametrul β este interpretat ca **parametru efectiv de zgomot**, nu ca temperatură termodinamică. Terminologia „de tip temperatură joasă” și „de tip temperatură înaltă” este strict structurală: un regim de tip temperatură joasă are coerență care persistă doar pentru β mare (fluctuații slabe), iar unul de tip

temperatură înaltă își păstrează coerența macroscopică și rigiditatea de fază pentru valori moderate ale lui β.

4.3. Modelul de rețea și acțiunea informațională

Distanța nu este presupusă, ci **emerge din constrângeri**: distanța relațională dintre două noduri este costul minim cumulat de-a lungul tuturor traseelor admisibile care le leagă, deci geometria este o noțiune derivată printr-un proces de granulație grosieră. Această distanță relațională se distinge de distanța discretă de tip „hop" (numărul minim de muchii traversate), folosită doar ca parametru operațional pentru organizarea datelor de corelație din simulări. Rețeaua pătratică folosită în calcule este o realizare convenabilă pentru studiul numeric; formalismul nu depinde de ea și poate fi generalizat la grafuri arbitrare.

Nodurile sunt situri relaționale abstracte, iar muchiile sunt căi admisibile de transport. Fiecare muchie are un cost de bază pozitiv κ_e și o variabilă binară $p_e \in \{0, 1\}$, care marchează activarea unui **canal de cost redus**; costul efectiv este:

$$C_{eff}(e) = \kappa_e \cdot (1 - \gamma \cdot p_e), \quad 0 < \gamma < 1 \tag{6}$$

Fiecare nod are, în plus, o **fază compactă** $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, un grad de libertate colectiv asociat coerenței (nu o funcție de undă cuantică). Cuplajul de fază există numai pe muchiile active ($p_e = 1$), astfel încât coerența este inseparabilă de transportul eficient. Percolarea (conectivitatea subgrafului activat, „scheletul" de transport) și coerența de fază (ordinea fazelor) sunt proprietăți distincte: poate exista o rețea de cost redus care percolează fără coerență robustă pe distanțe mari. Configurațiile sunt eșantionate cu ponderea Gibbs, iar acțiunea totală are trei componente:

$$S = S_{base} + S_{pair} + S_{phase}, \quad P_\beta \propto exp(-\beta \cdot S) \tag{7}$$

- $\mathbf{S_{base}} = \alpha \cdot \Sigma\ \kappa_e(1 - \gamma\ p_e)$ reprezintă costul global de transport; singur, nu favorizează activarea nediscriminată a canalelor, deoarece activarea este penalizată de alți termeni;
- $\mathbf{S_{pair}} = \varepsilon \cdot \Sigma\ p_e + U \cdot \Sigma_i\ (\Sigma\ p_e)^2$ conține costul intrinsec de activare ε și o penalizare pătratică de „aglomerare" U, care împiedică concentrarea canalelor în jurul unor noduri și favorizează o distribuție uniformă;
- $\mathbf{S_{phase}} = -J \cdot \Sigma\ p_e \cos(\varphi_i - \varphi_j)$ este un termen de tip XY, cu J controlând rigiditatea alinierii de fază, dar interpretat relațional.

Un regim de tip superconductiv este definit **operațional**, nu postulat: (i) canalele de cost redus formează o structură conexă extinsă la nivelul întregului sistem și (ii) corelațiile de fază rămân de lungă rază de-a lungul ei. O fază normală are conectivitate fragmentată și corelații de fază care scad rapid.

4.4. Metodologia numerică și observabilele

Modelul nu admite soluție analitică în formă închisă, așa că este studiat prin simulări **Monte Carlo** de tip Metropolis, pe o rețea pătratică bidimensională cu condiții la limită periodice (alegere motivată de caracterul cvasi-bidimensional al cupratelor și de claritatea definirii distanței și corelațiilor). Actualizările locale alternează între comutarea stării unei muchii ($p \to 1 - p$) și mici perturbări aleatoare ale unei faze. Simulările principale folosesc rețele 8×8, cu 500 de pași de termalizare, 1000 de pași de măsurare, 5 pași între măsurători și mediere pe 5 rulări independente; pentru rețelele 12×12 și 16×16 s-a folosit un protocol redus (150 de pași de termalizare, 60 de măsurare, 3 rulări).

Observabilele sunt exclusiv relaționale: **densitatea de perechi** ρ_p (fracția muchiilor active); **fracția celui mai mare cluster** conex de cost redus; **funcția de corelație de fază** $C(r) = \langle \cos(\varphi_i - \varphi_j) \rangle$ la distanța de tip „hop” r; **modulul de helicitate** Y, care măsoară costul energetic al unei deformări globale a câmpului de fază, adică rigiditatea de fază (o valoare pozitivă nenulă indică o coerență globală rezistentă la perturbări); și **dimensiunea geometrică efectivă** d_{eff}, extrasă din creșterea „bilelor relaționale”, $B(r) \sim r^d$. Autorii precizează că aceste mărimi diagnostichează organizarea structurală de tip superconductiv, nu superconductivitatea electromagnetică completă.

4.5. Trei regimuri emergente din aceeași acțiune

Rezultatul central este că **aceeași acțiune informațională** susține trei regimuri organizaționale distincte, obținute doar prin schimbarea valorilor parametrilor (cu $\alpha = 1$ și $\kappa = 1$): **normal** (cuplaj slab), **superconductiv fragil** (cuplaj intermediar) și **superconductiv robust la zgomot** (cuplaj puternic). Tabelul 2 sintetizează valorile principale pentru rețeaua 8×8.

Regim	Parametri (γ, J, ε, U)	Cluster maxim (β = 1)	C(2), de la β = 1 la 5	Y, de la β = 1 la 5	d_{eff} (β = 1)
Normal (N)	0,3; 0,3; 0,8; 0,2	0,096	≈ 0	≈ 0	0,63
Superconductiv fragil (F)	0,7; 1,0; 0,2; 0,1	0,754	0,076 → 0,876	0,006 → 0,254	1,09
Superconductiv robust (R)	0,9; 2,0; 0,0; 0,05	0,999	0,745 → 0,967	0,297 → 0,497	1,48

Tabel 2. Comparația celor trei regimuri pe rețeaua 8×8 (valori din simulările Monte Carlo ale tezei).

Regimul normal. Densitatea de perechi scade de la aproximativ 0,21 la β = 1 la aproximativ 0,02 la β = 5, clusterul maxim rămâne sub 0,10, iar corelațiile de fază și modulul de helicitate fluctuează în jurul lui zero: căile de cost redus rămân fragmentate și nu apare nicio coerență macroscopică.

Regimul fragil. Conectivitatea de cost redus este deja mare la $\beta = 1$ (cluster $\approx 0{,}75$) și devine practic extinsă pentru $\beta \geq 3$, dar corelațiile la distanță ($C(2) \approx 0{,}08$) și rigiditatea de fază ($Y \approx 0{,}006$) sunt foarte mici la zgomot ridicat și cresc abia când zgomotul scade. Regimul demonstrează că **percolarea este necesară, dar nu suficientă**: rețeaua poate fi conectată fără să fie coerentă. El corespunde tiparului superconductivității de temperatură joasă, în care coerența există, dar este fragilă.

Regimul robust. Chiar la $\beta = 1$, clusterul de cost redus acoperă practic întreaga rețea, $C(2) \approx 0{,}75$ și $Y \approx 0{,}30$; cu creșterea lui β, mărimile se apropie de saturație ($C(2) \approx 0{,}97$, $Y \approx 0{,}50$). Funcția $C(r)$ scade foarte lent cu distanța și devine aproape constantă pentru $\beta = 3$. Variind câmpul de împerechere ε între $-0{,}5$ și $+0{,}5$ la $\beta = 1$, densitatea de perechi scade de la 0,91 la 0,78, dar clusterul rămâne aproape de 1 și $C(2)$ rămâne între aproximativ 0,69 și 0,79. Coerența este deci stabilizată structural și robustă la penalizări energetice moderate ale formării perechilor. Aceasta justifică, în sens operațional și în unități adimensionale, denumirea de regim de tip „temperatură înaltă”. Variațiile lui β nu produc tranziții bruște, ci schimbări graduale ale observabilelor.

4.6. Verificarea la dimensiuni finite și geometria emergentă

Pentru a testa dacă rezultatele sunt un artefact al celei mai mici rețele, simulările au fost repetate pe rețele 12×12 și 16×16 ($\beta = 1$ și 3). **Ierarhia calitativă** $Y_R \gg Y_F \approx 0 \gtrsim Y_N$ se păstrează. În regimul robust, clusterul rămâne ≈ 1, dar $C(2)$ scade de la 0,745 ($L = 8$) la aproximativ 0,37 ($\beta = 1$), iar modulul de helicitate scade puternic între $L = 8$ și $L = 12$ (de la 0,297 la 0,055 la $\beta = 1$; de la 0,483 la 0,065 la $\beta = 3$), apoi se stabilizează între $L = 12$ și $L = 16$ (0,055 față de 0,056 la $\beta = 1$; 0,065 față de 0,083 la $\beta = 3$, deci încă clar pozitiv). Se interpretează reducerea ca o renormalizare de dimensiune finită, specifică rețelelor foarte mici, și subliniază că nu extrapolează la limita termodinamică și nu afirmă existența unor exponenți critici, a unei clase de universalitate sau a unei tranziții de fază bine definite. În regimul fragil, conectivitatea persistă, dar rigiditatea rămâne slabă; regimul normal rămâne incoerent la toate dimensiunile.

Analiza creșterii bilelor relaționale (numărul de noduri accesibile în r pași folosind doar muchii de cost redus) arată o a doua dimensiune a fenomenului: **reorganizarea geometrică**. Dimensiunea efectivă crește monoton de la 0,63 în regimul normal (structură filamentară, subliniară), la 1,09 în cel fragil (schelet extins, dar aproape unidimensional), până la 1,48 în cel robust (geometrie mult mai densă și omogenă; valoarea rămâne sub dimensiunea de încorporare 2 din cauza efectelor de dimensiune finită și a umplerii incomplete la $\beta = 1$). Superconductivitatea apare astfel nu doar ca percolare și aliniere de fază, ci și ca **fază geometrică emergentă**, cu o accesibilitate relațională tot mai apropiată de umplerea spațiului.

4.7. Discuție, limite și concluzii

Discuția arată că un comportament de tip superconductiv poate apărea generic într-un cadru relațional–informațional, fără particule microscopice, vibrații ale rețelei sau interacțiuni specifice materialelor. Diferența dintre superconductivitatea de temperatură joasă și cea de temperatură înaltă este reinterpretată ca o diferență de **stabilitate structurală**, nu de mecanism microscopic: în regimul fragil, alinierea de fază este ușor perturbată de zgomot (analog necesității unei răciri intense în superconductoarele convenționale), în timp ce în regimul robust arhitectura relațională favorizează conectivitatea densă și alinierea robustă de fază. Cadrul nu concurează teoriile microscopice, ci le completează la nivel structural și axiomatic; are analogii cu teoria BCS și modelele XY (rolul fazei macroscopice), cu sistemele percolative și granulare (coerență din conectivitate) și, într-un sens limitat, cu condensarea de tip string-net, fără a genera însă ordine topologică sau bosoni de calibrare emergenți.

Limitele sunt asumate explicit. Modelul este minimal și abstract: nu include câmpuri electromagnetice, statistică fermionică sau grade de libertate gauge dinamice și, prin urmare, nu reproduce efectul Meissner, adâncimea de penetrare London, cuantizarea fluxului, efectele izotopice sau semnăturile spectroscopice. Rețelele sunt mici, iar o analiză sistematică de scalare la dimensiuni finite este necesară pentru limita termodinamică. Direcțiile propuse sunt cartografierea sistematică a spațiului parametrilor pentru frontierele de fază, extinderea către sisteme dezordonate, ponderate sau neeuclidiene, cuplarea fazelor la câmpuri gauge emergente și studiul unor ecuații de tip London într-un cadru relațional.

Concluzia capitolului este că **superconductivitatea – înțeleasă ca transport fără rezistență și coerent în fază – poate fi modelată ca fază emergentă robustă a organizării relaționale**. Nu este nevoie de nicio modificare calitativă a principiilor de bază pentru a trece de la conducția normală la superconductivitate sau de la regimul de tip temperatură joasă la cel de tip temperatură înaltă: toate apar din aceeași acțiune informațională și diferă prin echilibrul cantitativ dintre reducerea costului de transport, penalizările de activare și rigiditatea de fază. Capitolul oferă o demonstrație de principiu că astfel de structuri sunt suficiente pentru a genera comportament de tip superconductiv, independent de detaliile microscopice.

Capitolul 5. Concluzii finale și direcții viitoare de cercetare

5.1. Sinteza rezultatelor tezei

Obiectivul fundamental al tezei a fost dezvoltarea unui cadru teoretic unificat pentru sistemele complexe, bazat pe dinamica multifractală și pe dependența de rezoluția de scară. Se concluzionează că această abordare oferă o alternativă robustă și generalizabilă la modelele clasice, capabilă să descrie fenomene neliniare, emergente și multiscalare într-o manieră coerentă. Un rezultat esențial este confirmarea faptului că ipoteza derivabilității traiectoriilor, fundamentală în mecanica clasică, nu este adecvată pentru sisteme reale complexe; adoptarea curbelor continue, dar nederivabile, permite integrarea naturală a comportamentelor haotice și a instabilităților. Dinamica nu mai este determinată de o singură traiectorie, ci de un ansamblu de traiectorii posibile, fiecare asociată unui nivel de rezoluție, ceea ce conduce la o reinterpretare profundă a unor noțiuni fundamentale din fizică și matematica aplicată.

5.2. Elemente de noutate

Noutățile evidențiate se grupează după capitole:

- **Cadrul general:** introducerea dependenței explicite de rezoluția de scară; reinterpretarea traiectoriilor ca structuri multifractale; reinterpretarea energiei ca mărime dependentă de scară.
- **Farmacologie:** reformularea farmacocineticii într-un cadru multifractal; descrierea difuziei ca proces neliniar și neclasic; aplicarea ecuațiilor Fokker–Planck fractale pentru distribuția spațio-temporală a medicamentului.
- **Atmosferă:** modelarea atmosferei ca sistem multifractal; introducerea spectrului de singularitate ca instrument de caracterizare a dinamicii atmosferice.
- **Model relațional:** un model de graf ponderat; canale de transport de cost redus care apar ca variabile emergente, nu ca proprietăți impuse; corelarea transportului cu coerența de fază (coerența apare doar unde există conectivitate eficientă); reinterpretarea superconductivității ca fenomen emergent al organizării colective, nu al unui mecanism microscopic specific.

5.3. Coerența dintre capitole

Cele patru capitole formează un sistem coerent: primul are rol de fundament conceptual, al doilea și al treilea sunt aplicații (farmacologică, respectiv atmosferică), iar al patrulea este un model fundamental cu caracter emergent și inovator. Toate rezultatele converg către aceeași concluzie: sistemele complexe sunt guvernate de dinamici multifractale, neliniare și emergente, independente de domeniul de aplicație; dinamica multifractală reprezintă un limbaj universal

pentru descrierea lor; iar complexitatea nu este o excepție a sistemelor naturale, ci regula fundamentală.

5.4. Direcții viitoare de cercetare

- extinderea formalismului multifractal către modele numerice și simulări de înaltă rezoluție (Monte Carlo, metode stocastice, simulări multi-agent);
- în farmacologie, modele predictive pentru eliberarea controlată, integrarea cu date experimentale reale, optimizarea sistemelor polimer–medicament și personalizarea terapiilor;
- extinderea către sisteme biologice complexe (rețele neuronale, procese de reabilitare, semnale EEG/ECG), cu potențial pentru medicina personalizată;
- în dinamica atmosferică, integrarea datelor de teledetecție cu modele multifractale și folosirea inteligenței artificiale pentru identificarea tiparelor și a tranzițiilor către haos, cu impact asupra prognozei meteorologice și modelelor climatice;
- modele relaționale pentru sisteme cuantice, prin extinderea grafului ponderat către rețele dinamice și neeuclidiene, pentru o mai bună înțelegere a coerenței și transportului cuantic;
- studiul emergenței geometriei din structuri relaționale, cu implicații în fizica teoretică și cosmologie, și integrarea formalismului multifractal cu teoria informației (flux de informație, entropie);
- validarea experimentală a modelelor, prin colaborare interdisciplinară între fizicieni, medici, chimiști și ingineri.

Bibliografie finală

1. Agop M., Irimiciuc A.S., Multifractal Theory of Motion From Small to Large Scales, Springer Nature, Singapore 2024.
2. Agop M., Merches I., Operational procedures descrbing physical systems, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2019.
3. Agop M., Păun V.P., On the New Perspectives of Fractal Theory. Fundaments and Applications; Romanian Academy Publishing House: Bucharest, Romania, 2017.
4. Agop, M.; Paun, V.P. On the New Perspectives of Fractal Theory. In Fundaments and Applications; Romanian Academy Publishing House: Bucharest, Romania, 2017.
5. Albert, R.; Barabási, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. Rev. Mod. Phys.2002, 74, 47–97.
6. Aloyan, A.E.; Yermakov, A.N.; Arutyunyan, V.O. Modeling the influence of ions on the dynamics of formation of atmospheric aerosol, Izvestiya. Atmos. Ocean. Phys. **2021**, 57, 104–109.
7. Anderson, P.W. The resonating valence bond state in La_2CuO_4 and superconductivity. Science1987, 235, 1196–1198.
8. **Andreea Bianca Bruma**, George Sebastian Iftimie, Cristina Moraru, Cristina Marcela Rusu, Towards drug release dynamics from a multifractal perspective of motion, Published by "Gheorghe Asachi" Technical University of Iaşi Section Mathematics. Theoretical Mechanics. Physics Volume 68(72), No. 4, 2022 DOI: 10.2478/bipmf-2022-0020
9. **Andreea Bianca Bruma**, George Sebastian Iftimie, Matei Moruz, Radu Ciorap, "Holographic" type implementation in the description of drug release dynamics, Published by "Gheorghe Asachi" Technical University of Iaşi Section Mathematics. Theoretical Mechanics. Physics Volume 68(72), No. 4, 2022 DOI: 10.2478/bipmf-2022-0019
10. Atiyah, M.F.; Sutcliffe, P. Skyrmions, Instantons, Mass and Curvature. Phy. Lett. D **2004**, 605, 106–114.
11. Available online: https://cloudnet.fmi.fi/search/visualizations?site=galati& dateFrom=2023-02-05&dateTo=2023-02-05 (accessed on 28 January 2024).
12. Bardeen, J.; Cooper, L.N.; Schrieffer, J.R. Theory of Superconductivity. Phys. Rev.1957, 108, 1175–1204.
13. Barret J.S., Fundamentals of drug development, John Wiley & Sons, Inc., 2022.
14. Bednorz, J.G.; Müller, K.A. Possible high Tc superconductivity in the Ba–La–Cu–O system. Z. Phys. B1986, 64, 189–193.

15. Benzi, R.; Paladin, G.; Parisi, G.; Vulpiani, A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems. J. Phys. A Math. Gen. **1984**, 17, 3521.

16. Berselli, L.C. Three-Dimensional Navier-Stokes Equations for Turbulence; Academic Press: Cambridge, MA, USA, 2021; pp. 1–313.

17. **Bianca Brumă**, Călin Gheorghe Buzea, Diana Mirilă , Valentin Nedeff, Florin Nedeff , Maricel Agop, Ioan Gabriel Sandu and Decebal Vasincu, A Weighted Relational Graph Model for Emergent Superconducting-Like Regimes: Gibbs Structure Percolation, and Phase Coherence, Axioms 2026, 2026, 15(5)

18. Bollobás, B. Modern Graph Theory; Graduate Texts in Mathematics 184; Springer: New York, NY, USA, 1998.

19. Buzea, C.G.; Nedeff, F.; Mirilă, D.; Nedeff, V.; Rusu, O.; Agop, M.; Vasincu, D. An Axiomatic Relational–Informational Framework for Emergent Geometry and Effective Spacetime. Axioms2026, 15, 154.

20. Canfora, F.; Maeda, H. Hedgehog ansatz and its generalization for self-gravitating Skyrmions. Phys. Rev. D **2013**, 87, 084049.

21. Cardy, J. Scaling and Renormalization in Statistical Physics; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1996.

22. Carinena, J.F.; Ramos, A. Integrability of the Riccati equation from a group-theoretical viewpoint. Int. J. Mod. Phys. A **1999**, 14, 1935–1951.

23. Cazacu, M.M.; Rosu, I.A.; Bibire, L.; Vasincu, D.; Rotundu, A.M.; Agop, M. Theoretical and Experimental Designs of the Planetary Boundary Layer Dynamics through a Multifractal Theory of Motion. Fractal Fract. **2022**, 6, 747.

24. Cloudnet Data Portal. Publications. Available online: https://cloudnet.fmi.fi/publications (accessed on 6 March 2024).

25. Colbeck, I.; Lazaridis, M. Aerosol Science;Wiley Online Library: West Sussex, UK, 2014.

26. Cristescu C.P., Dinamici neliniare și haos. Fundamente teoretice și aplicații, Romanian Academy Ed., Bucharest, 2008.

27. Cristescu, C.P. Nonlinear dynamics and chaos. In Theoretical Fundaments and Applications; Romanian Academy Publishing House: Bucharest, Romania, 2008.

28. Dagan, G.; Yeheskel, N.;Williams, A.I.L. Radiative forcing from aerosol–cloud interactions enhanced by large-scale circulation adjustments. Nat. Geosci. **2023**, 16, 1092–1098.

29. Dagotto, E. Complexity in strongly correlated electronic systems. Science2005, 309, 257–262.

30. De Alfaro, V.; Fubini, S.; Furlan, G. Conformal Invariance in Quantum Mechanics. Nuovo Cimento A **1976**, 34, 569–611.

31. Decebal Vasincu, Andreea **Bianca Bruma**, Oana Rusu, Cristina Marcela Rusu, Vlad Ghizdovat, Maricel Agop, Coherences in the Dynamics of Physical Systems from a Multifractal Perspective of Motion, Entropy 8(25), 2023, 10.3390/e25081143

32. Delanoe, J.M.E.; Hogan, R.J. A Variational Scheme for Retrieving Ice Cloud Properties from Combined Radar, Lidar, and Infrared Radiometer. J. Geophys. Res. **2008**, 113.

33. Denman, H.H. Time Translation Invariance for Certain Dissipative Classical Systems. Am. J. Phys. **1968**, 36, 516.

34. Dittrich, W.; Reuter, M. Classical, and Quantum Dynamics; Springer: New York, NY, USA, 2017.

35. Dong, Q.; Wang, Y.; Li, P. Multifractal behavior of an air pollutant time series and the relevance to the predictability. Environ. Pollut. **2017**, 222, 444–457.

36. Farhi, E.; Khoze, V.V.; Singleton, R., Jr. Minkowski space non-Abelian classical solutions with noninteger winding number change. Phys. Rev. D **1993**, 47, 5551.

37. Fernández-Martínez, M.; Sánchez-Granero, M.A. A new fractal dimension for curves based on fractal structures. Topol. Its Appl. **2016**, 203, 108–124.

38. Fisher, M.E.; Barber, M.N.; Jasnow, D. Helicity modulus, superfluidity, and scaling in isotropic systems. Phys. Rev. A1973, 8, 1111–1124.

39. Georgii, H.-O. Gibbs Measures and Phase Transitions, 2nd ed.; De Gruyter Studies in Mathematics 9; Walter de Gruyter: Berlin, Germany, 2011.

40. Grimmett, G. Percolation, 2nd ed.; Springer: Berlin, Germany, 1999.

41. Hang, Y.; L'Ecuyer, T.S.; Henderson, D.S.; Matus, A.V.; Wang, Z. Reassessing the Effect of Cloud Type on Earth's Energy Balancein the Age of Active Spaceborne Observations. Part II: Atmospheric Heating. J. Clim. **2019**, 32, 6219–6236.

42. Havlin, S.; Ben-Avraham, D. Diffusion in disordered media. Adv. Phys.1987, 36, 695–798.

43. Hillery A.M., Park K. (Eds), Drug delivery: Fundametals & Applications (Second Edition), CRC Press, Taylor &Francis Group, 2016.

44. Hong, Y.; Liu, G.; Li, J.L.F. Assessing the Radiative Effects of Global Ice Clouds Based on CloudSat and CALIPSO Measurements. J. Clim. **2016**, 29, 7651–7674.

45. Hou Thomas Y., Multi-Scale Phenomena in Complex Fluids: Modelling, Analysis and Numerical Simulations, World Scientific Publishing Company, 2009.

46. Ilhan, E.; Veeresha, P.; Baskonus, H.M. Fractional approach for a mathematical model of atmospheric dynamics of CO2 gas with an efficient method. Chaos Solitons Fractals **2021**, 152, 111347.

47. Illingworth, A.J.; Hogan, R.J.; O'Connor, E.J.; Bouniol, D.; Brooks, M.E.; Delanoé, J.; Donovan, D.P.; Eastment, J.D.; Gaussiat, N.; Goddard, J.W.F. Cloudnet: Continuous Evaluation of Cloud Profiles in Seven Operational Models Using Ground-based Observations. Bull. Am. Meteorol. Soc. **2007**, 88, 883–898.

48. Iovan, G.; Stoleriu, S.; Nica, I.; Solomon, S.; Munteanu, A.; Andrian, S. Surface characteristics of restorative composite resins after polishing with profine lamineer tips. Mater. Plast. **2016**, 53, 755–758.

49. Jackson E.A., Perspectives on Nonlinear Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

50. Jackson, E.A. Perspectives of Nonlinear Dynamics; CUP Archive: Cambridge, UK, 1989; Volume 1.

51. Keimer, B.; Kivelson, S.A.; Norman, M.R.; Uchida, S.; Zaanen, J. From quantum matter to high-temperature superconductivity. Nature2015, 518, 179–186.

52. Kosterlitz, J.M.; Thouless, D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. J. Phys. C1973, 6, 1181–1203.

53. Kulkarni, P.; Baron, P.A.; Willeke, K. Aerosol Measurement: Principles, Techniques, and Applications, 3rd ed.; John Wiley & Sons, Inc.:Hoboken, NJ, USA, 2011.

54. Landau, D.P.; Binder, K. A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics, 4th ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2014.

55. Landau, L.D.; Lifschitz, E.M. M*é*canique, Mir Editions, Moscou Larmor, J. (1900): Aether and Matter; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1966.

56. Lee, P.A.; Nagaosa, N.; Wen, X.-G. Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity. Rev. Mod. Phys.2006, 78, 17–85.

57. Lyons, R.; Peres, Y. Probability on Trees and Networks; Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2016.

58. M Agop, Stefan Andrei Irimiciuc, Multifractal Theory of Motion From Small to Large Scales, Springer Nature, Singapore, 2024

59. Mandelbrot, B.B. Fractal and Chaos; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2004.

60. Mandlebrot B.B., The Fractal Geometry of Nature; W.H. Freemanand Co.: SanFrancisco, CA, USA, 1982.

61. Marius Mihai Cazacu, Alin Iulian Roșu, Razvan Vasile Ababei, Adrian Roșu, Decebal Vasincu, Dragoș Constantin Nica, Oana Rusu, **Andreea Bianca Bruma**, Maricel Agop, Investigating Nonlinear Dynamics in Atmospheric Aerosols during the Transition from Laminar to Turbulent Flow, Atmosphere 3(8), 2024, 10.3390/atmos15030366

62. Mazilu, N.; Agop, M.; Gatu, I.; Iacob, D.D.; Ghizdovat, V. From Kepler problem to skyrmions. Mod. Phys. Lett. B **2016**, 30, 1650153.

63. Mercheș I., Agop M., Differentiability and Fractality in Dynamics of Physical Systems; World Scientific: Hackensack, NJ, USA, 2016.

64. Metropolis, N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.N.; Teller, A.H.; Teller, E. Equation of state calculations by fast computing machines. J. Chem. Phys.1953, 21, 1087–1092.

65. Michel O.D., Thomas B.G., Mathematical Modelling for Complex Fluids and Flows, Springer, 2012.

66. Misner, C.W. Harmonic Maps as Models for Physical Theories. Phys. Rev. D **1978**, 18, 4510–4524.

67. Mitchell M., Complexity: A Guided Tour, Oxford University Press, Oxford, 2009.

68. Nelson, D.R.; Kosterlitz, J.M. Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids. Phys. Rev. Lett.1977, 39, 1201–1205.

69. Newman, M.E.J. Networks: An Introduction; Oxford University Press: Oxford, UK, 2010.

70. Niederer, U. The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schrödinger Equation. Helv. Phys. Acta **1972**, 45, 802–810.

71. Nottale, L. Scale Relativity and Fractal Space-Time: A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics; Imperial College Press: London, UK, 2011.

72. Ollivier, Y. Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. J. Funct. Anal.2009, 256, 810–864.

73. Paladin, G.; Vulpiani, A. Anomalous scaling laws in multifractal objects. Phys. Rep. **1987**, 156, 147–225.

74. Pancu, G.; Iovan, G.; Ghiorghe, A.; Topoliceanu, C.; Nica, I.; Tofan, N.; Stoleriu, S.; Sandu, A.V.; Andrian, S. The assessment of biological parameters and remineralisation potential of saliva in pregnancy. Rev. Chim. **2015**, 66, 2051–2056.

75. Rekier, J.; Chao, B.F.; Chen, J.; Dehant, V.; Rosat, S.; Zhu, P. Earth's Rotation: Observations and Relation to Deep Interior. Surv. Geophys. **2021**, 43, 149–175.

76. Rogers, C.; Schief,W.K. Bäcklund and Darboux Transformations; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2002.

77. Rosu, A.; Constantin, D.; O'Connor, E.; Voiculescu, M. Categorize Data from Galati on 04 & 05 of February 2023, ACTRIS Cloud Remote Sensing Data Centre Unit (CLU) 2022.

78. Rosu, I.A.; Cazacu, M.M.; Ghenadi, A.S.; Bibire, L.; Agop, M. On a Multifractal Approach of Turbulent Atmosphere Dynamics. Front. Earth Sci. **2020**, 8, 216.

79. Rosu, I.A.; Nica, D.C.; Cazacu, M.M.; Agop, M. Cellular Self-Structuring and Turbulent Behaviors in Atmospheric Laminar Channels. Front. Earth Sci. **2022**, 9, 1344.

80. Rovelli, C. Quantum Gravity; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2004.

81. Sachdev, S. Quantum Phase Transitions, 2nd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2011.

82. Scalapino, D.J. A common thread: The pairing interaction for unconventional superconductors. Rev. Mod. Phys.2012, 84, 1383–1417.

83. Schoeberl, M.R.; Jensen, E.J.; Pfister, L.; Ueyama, R.; Avery, M.; Dessler, A.E. Convective Hydration of the Upper Troposphere and Lower Stratosphere. J. Geophys. Res. Atmos. **2018**, 123, 4583–4593.

84. Seigneur, C.; Hudischewskyj, A.B.; Seinfeld, J.H.; Whitby, K.T.; Whitby, E.R.; Brock, J.R.; Barnes, H.M. Simulation of Aerosol Dynamics: A Comparative Review of Mathematical Models. Aerosol Sci. Technol. **1986**, 5, 205–222.

85. Skyrme, T.H.R. A Non-Linear Field Theory. Proc. R. Soc. Lond. **1961**, A260, 127–138.

86. Skyrme, T.H.R. Selected Papers, with Comentary; Brown, G.E., Ed.; World Scientific Series in 20th Century Physics; World Scientific: Singapore, 1994; Volume 3.

87. Skyrme, T.H.R. The Origins of Skyrmions. Int. J. Mod. Phys. **1988**, A3, 2745–2751.

88. Slobodeanu, R. On the Geometrized Skyrme and Faddeev Models. arXiv **2009**, arXiv:0809.4864v5.

89. Stanley, H.E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena; Oxford University Press: Oxford, UK, 1971.

90. Stauffer, D.; Aharony, A. Introduction to Percolation Theory, 2nd ed.; Taylor & Francis: London, UK, 1994.

91. Stoler, D. Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets. Phys. Rev. **1970**, D1, 3217.

92. Stoler, D. Generalized Coherent States. Phys. Rev. **1971**, D4, 2309.

93. Stoleriu, S.; Iovan, G.; Pancu, G.; Nica, I.; Andrian, S. Study concerning the influence of the finishing and polishing systems on the surface state of various types of composite resins. Rom. J. Oral Rehabil. **2013**, 5, 78–83.

94. Taraboanta, I.; Stoleriu, S.; Nica, I.; Georgescu, A.; Gamen, A.C.; Maftei, G.A.; Andrian, S. Roughness variation of a nanohybrid composite resin submitted to acid and abrasive challenges. Int. J. Med. Dent. **2020**, 24, 182–187.

95. Tinkham, M. Introduction to Superconductivity, 2nd ed.; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1996.

96. Tofan, N.; Andrian, S.; Nica, I.; Stoleriu, S.; Topoliceanu, C.; Chelariu, R.; Bolat, M.; Pancu, G. The Assessment of Erosive Potential of Some Acid Beverages on Indirect—Restorative Materials. Rev. Chim. **2016**, 67, 1144–1149.

97. Wen, X.-G. Quantum Field Theory of Many-Body Systems; Oxford University Press: Oxford, UK, 2004.

98. Woess, W. Random Walks on Infinite Graphs and Groups; Cambridge Tracts in Mathematics 138; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2000.

99. Yang, P.; Baum, B.A. Satellites and Satellite Remote Sensing: Remote Sensing: Cloud Properties. In Encyclopedia of Atmospheric Sciences, 2nd ed.; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2015; pp. 116–127.

100. Yi, B. Diverse cloud radiative effects and global surface temperature simulations induced by different ice cloud optical property parameterizations. Sci. Rep. **2022**, 12, 10539.

101. Zelikin, M.I. Control Theory and Optimization, Encyclopaedia of Mathematical Sciences; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2000; Volume 86.

102. Zou, L.; Griessbach, S.; Hoffmann, L.; Spang, R. A global view on stratospheric ice clouds: Assessment of processes related to their occurrence based on satellite observations. Atmos. Chem. Phys. **2022**, 22, 6677–6702.

Listă lucrări

1. **Andreea Bianca Bruma**, George Sebastian Iftimie, Cristina Moraru, Cristina Marcela Rusu, Towards drug release dynamics from a multifractal perspective of

motion, Published by "Gheorghe Asachi" Technical University of Iaşi Section Mathematics. Theoretical Mechanics. Physics Volume 68(72), No. 4, 2022 DOI: 10.2478/bipmf-2022-0020

2. **Andreea Bianca Bruma**, George Sebastian Iftimie, Matei Moruz, Radu Ciorap, "Holographic" type implementation in the description of drug release dynamics, Published by "Gheorghe Asachi" Technical University of Iaşi Section Mathematics. Theoretical Mechanics. Physics Volume 68(72), No. 4, 2022 DOI: 10.2478/bipmf-2022-0019

3. **Bianca Brumă,** Călin Gheorghe Buzea, Diana Mirilă , Valentin Nedeff, Florin Nedeff , Maricel Agop, Ioan Gabriel Sandu and Decebal Vasincu, A Weighted Relational Graph Model for Emergent Superconducting-Like Regimes: Gibbs Structure Percolation, and Phase Coherence, Axioms 2026, 2026, 15(5), AIS: 0.311

4. Marius Mihai Cazacu, Alin Iulian Roșu, Razvan Vasile Ababei, Adrian Roșu, Decebal Vasincu, Dragoș Constantin Nica, Oana Rusu, **Andreea Bianca Bruma**, Maricel Agop, Investigating Nonlinear Dynamics in Atmospheric Aerosols during the Transition from Laminar to Turbulent Flow, Atmosphere 3(8), 2024, 10.3390/atmos15030366, AIS: 0.534

5. Decebal Vasincu, **Andreea Bianca Bruma**, Oana Rusu, Cristina Marcela Rusu, Vlad Ghizdovat, Maricel Agop, Coherences in the Dynamics of Physical Systems from a Multifractal Perspective of Motion, Entropy 8(25), 2023, 10.3390/e25081143, AIS: 0.496