



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73

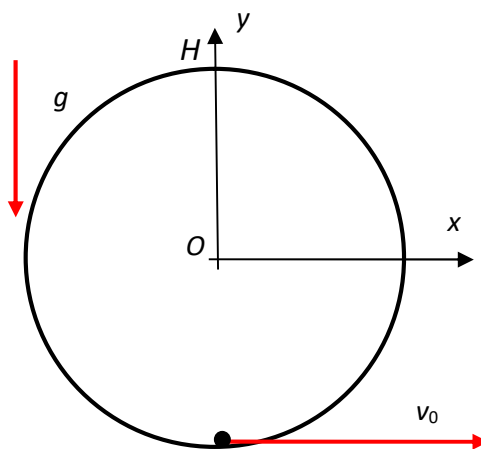


Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Enunțuri-

Problema I

Un punct material (PM) este lansat cu viteza v_0 paralelă cu axa x , pe interiorul unui cerc fix de rază R aflat în plan vertical, în câmp gravitațional uniform de intensitate g , paralel și de sens opus axei y , vezi desenul alăturat. Considerând o mișcare fără frecare, calculați:

1. viteza minimă de lansare v_0 pentru ca PM să rămână permanent în contact cu cercul și viteza cu care PM ajunge în punctul de maxima înălțime H în acest caz;
2. viteza minimă de lansare v_0 pentru care PM se desprinde de cerc;
3. viteza v_0 pentru ca, după lansare, PM să treacă prin originea O a planului xy , aflată în centrul cercului.



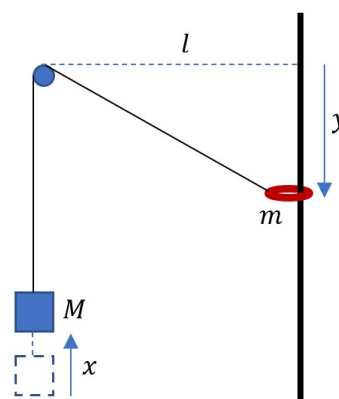
Conf. univ. dr. T. O. Cheche, Universitatea București



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Enunțuri-

Problema II

Un mic inel cu masa m poate aluneca fără frecare pe o tijă verticală fixă, nedeformabilă. Inelul este legat de capătul unui fir ideal. Firul este trecut peste un cui neted, iar la capătul liber este legat un mic cub cu masa $M > m$. Cuiul se află la distanța l de tijă, iar sistemul este ținut în repaus cu inelul aflat la nivelul cuiului (v. Fig.). Alegând nivelul la care s-a aflat cubul la momentul inițial drept nivel de referință pentru energia potențială gravitațională, determină:



- lucrul mecanic elementar efectuat de forțele externe care acționează asupra cubului, lucrul mecanic elementar efectuat de forțele externe care acționează asupra inelului. Arată că lucrul mecanic total, obținut prin sumarea primelor două, are expresia $mgdy - Mgdx$;
- distanța y_1 parcursă de inel până la următoarea oprire și lungimea minimă L_{min} a firului care permite parcurgerea acestei distanțe de către inel;
- viteza v_0 a inelului în momentul în care energia cinetică totală a sistemului este maximă, precum și tensiunea T_0 din fir în acel moment.

Problemă propusă de:

Conf. Univ. Dr. Sebastian POPESCU, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Conf. Univ. Dr. Daniel ANDREICA, Universitatea „Babeș - Bolyai” din Cluj - Napoca



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

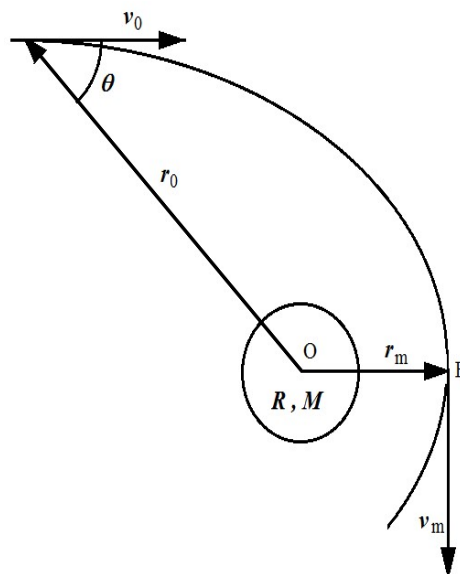
Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Enunțuri-

Problema III

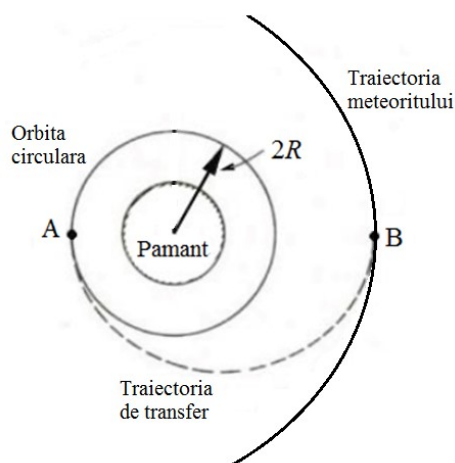
Un meteorit cu masa $m = 20$ tone intră în sfera de atracție gravitațională a Pământului. Meteoritul este observat atunci când se află la distanța $r_0 = 8R$ de centrul Pământului, unde R este raza Pământului; viteza meteoritului în momentul observării este $v_0 = \sqrt{gR}$, unde g este accelerația gravitațională la suprafața Pământului. Direcția vitezei meteoritului în momentul observării sale formează unghiul $\theta = 30^\circ$ cu vectorul de poziție având originea în centrul Pământului (vezi figura).



a) Determinați distanța minimă r_m la care se apropie meteoritul de Pământ și viteza sa v_m în momentul respectiv.

Analizele astronomilor au condus la concluzia că meteoritul este alcătuit, în cea mai mare parte, dintr-un metal rar și valoros, drept pentru care s-au gândit să-l aducă pe Pământ. Fiind un fel de cursă contra cronometru, o agenție spațială și-a propus să folosească următoarea metodă (nu foarte elegantă):

Profitând de faptul că agenția are o navetă spațială cam veche, cu masa $m_s = 16$ tone, ce arbitrează în jurul Pământului, pe o orbită circulară cu raza $r_1 = 2R$, inginerii agenției s-au gândit să transfere această navetă pe o orbită eliptică care să întâlnească traiectoria meteoritului chiar în punctul și în momentul în care acesta se află cel mai aproape de Pământ (vezi figura). Ar urma ca naveta și meteoritul să se ciocnească frontal, plastic, iar corpul astfel rezultat să cadă pe Pământ.



Pentru ca naveta să treacă de pe orbita circulară



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"

Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,

Anul I de studii

-Enunțuri-

pe cea de interceptie a meteoritului este nevoie ca în punctul A sa fie pornit pentru scurt timp motorul de propulsie al navetei, pentru ca viteza acesteia sa crească.

Aflați:

b) Cu ce viteză v_B va ajunge naveta în punctul B și cât timp va dura transferul navetei din A în B?

c) Corpul rezultat prin ciocnirea navetei cu meteoritul va cădea pe Pământ sau el va deveni un satelit al Pământului? Argumentați cantitativ răspunsul dat.

Se vor lua $g = 10 \text{ m/s}^2$ și $R = 6400 \text{ km}$.

Se neglijează frecările precum și influențele gravitaționale ale altor corpuri cerești, iar Pământul este presupus fix și sferic.

Conf. Univ. Dr. Paul Barvinschi, Universitatea de Vest din Timișoara



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

Problema I

Notare: Fiecare întrebare are 10 puncte (nota finală se obține prin mediere).

1.

Pentru PM în contact cu cercul,

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg \cos \alpha \quad (1) \text{ 2p}$$

și față de dreapta de referință $y = -R$,

$$m \frac{v_0^2}{2} = m \frac{v^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha). \quad (2) \text{ 2p}$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$

$$N = mg \left(-2 + 3 \cos \alpha + \frac{v_0^2}{gR} \right) \quad (3)$$

Pentru contact permanent $N \geq 0$ pentru orice α ;

$(3 \cos \alpha - 2)|_{\min} = -5$ (pentru $\alpha = (2n+1)\pi$, n întreg) și, din (3), obținem condiția:

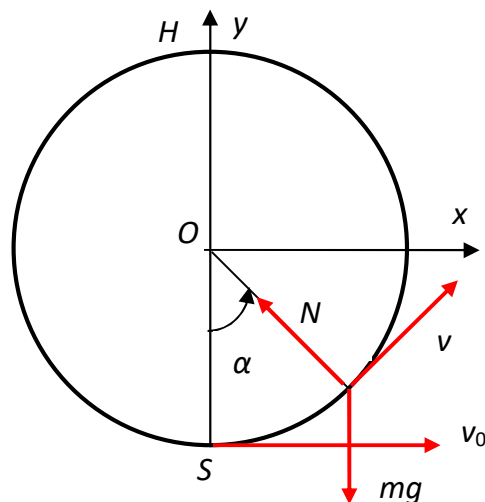
$$\left(-5 + \frac{v_0^2}{gR} \right) \geq 0 \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$v_{0\min} = \sqrt{5gR}. \quad (5) \text{ 5p}$$

Deci, dacă în mișcarea sa pe interiorul cercului PM lansat din S ajunge în H (la înălțime maximă $2R$ față de punctul de start S), ceea ce se întâmplă pentru lansare cu viteză cel puțin $v_{0\min} = \sqrt{5gR}$, obținem că PM va continua să rămână în permanent contact cu cercul ($N(\alpha) > 0$ pentru orice $\alpha \neq (2n+1)\pi$, n întreg).

Din (2), cu $v_0 \rightarrow v_{0\min} = \sqrt{5gR}$ și $\alpha = \pi$, viteza PM în H este:





ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

$$v_H = \sqrt{gR} . \quad (6) \text{ 1p}$$

Comentariu: mai direct, trebuie considerat cazul cel mai nefavorabil pastrarii contactului, contactul in H si realizat ca N scade cu $\alpha \in [0, \pi]$ pentru v_0 dat.

2.

Din (3)

$$N = mg \left(\frac{v_0^2}{gR} + 2 \cos \alpha - 2 + \cos \alpha \right) \quad (7)$$

si din (2)

$$\frac{v_0^2}{gR} + 2 \cos \alpha - 2 \geq 0 \quad (8)$$

Din (7) si (8) $\Rightarrow N$ poate fi nul (desprindere) numai pentru

$$\cos \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2]. \quad (9) \text{ 5p}$$

Pentru **cadran II**, $\alpha \in [\pi/2, \pi]$: functia $-2 + 3 \cos \alpha$ este monoton descrescatoare si pentru contact la limita ($N = 0$), din (3), obtinem ca v_0 trebuie sa creasca cu α ($v_0(\alpha)$ trebuie sa fie o functie strict crescatoare). **2p**

Pentru **cadran III**, $\alpha \in [\pi, 3\pi/2]$: functia $-2 + 3 \cos \alpha$ este monoton crescatoare, dar pentru ca PM sa ajunga in acest cadran trebuie sa treaca mai intai prin punctul H de inaltime maxima (trebuie sa fie lansat cu viteza cel putin egala cu $v_{0\min} = \sqrt{5gR}$, conform cu 1). **2p**

In consecinta, viteza minima de lansare astfel incat PM sa se desprinda de cerc corespunde unghiului minim din intervalul $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\alpha = \pi/2$, si din (3) obtinem:

$$v_{0\min} = \sqrt{2gR} \quad \text{1p}$$



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

3.

$$x_1 = R \sin \alpha_1 \text{ si } y_1 = -R \cos \alpha_1. \quad (10) \text{ 1p}$$

Din (2)

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \alpha_1). \quad (11) \text{ 0.5p}$$

Din (3), cu $N = 0$ (pentru desprindere),

$$\cos \alpha_1 = \left(2 - \frac{v_0^2}{gR} \right) / 3. \quad (12) \text{ 0.5p}$$

Ecuatia traiectoriei (parabola) cu lansare in L

$$y = y_1 + (x - x_1)tg\alpha_1 - \frac{g(x - x_1)^2}{2v_1^2 \cos^2 \alpha_1}, \quad (13) \text{ 1.5p}$$

este scrisa pentru originea O

$$0 = y_1 - x_1 tg \alpha_1 - \frac{gx_1^2}{2v_1^2 \cos^2 \alpha_1} \quad (14) \text{ 2p}$$

si dupa simplificare cu (10), (11) si (12) se obtine

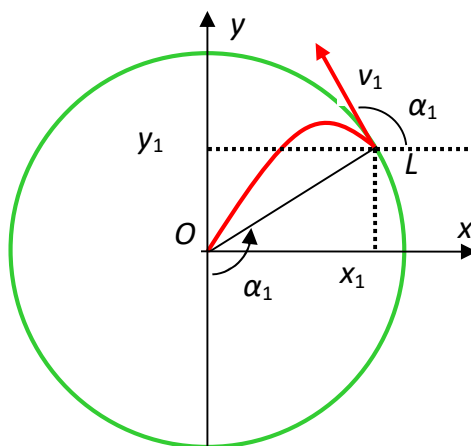
$$g^2 R^2 - 4gRv_0^2 + v_0^4 = 0. \quad (15) \text{ 1p}$$

=>

$$v_0^2 = (2 \pm \sqrt{3})gR, \quad (16) \text{ 1p}$$

iar solutia care convine ($v_1^2 > 0$ in (11)) este

$$v_0^2 = (2 + \sqrt{3})gR. \quad (17) \text{ 2.5p}$$





ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

Problema II

A	2,0 p
Asupra cubului acționează două forțe: greutatea sa și tensiunea din fir. Lucrul elementar efectuat de aceste forțe este $d\mathcal{L}_{cub} = Tdx - Mgdx.$	2 x 0,25
Asupra inelului acționează trei forțe: greutatea sa, tensiunea din fir și forța de reacțiune normală. Lucrul efectuat de aceste forțe este: $d\mathcal{L}_{inel} = m\vec{g} \cdot d\vec{y} + \vec{T} \cdot d\vec{y} + \vec{N} \cdot d\vec{y} = mgdy - T\cos\theta dy + 0 = mgdy - T \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}} dy.$	3 x 0,25
Lucrul mecanic total este $d\mathcal{L} = d\mathcal{L}_{cub} + d\mathcal{L}_{inel} = mgdy - Mgdx - T \left(\frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}} dy - dx \right) =$ $= mgdy - Mgdx - T \left[d \left(\sqrt{l^2 + y^2} \right) - dx \right] =$ $= mgdy - Mgdx,$ deoarece firul este inextensibil. Prin urmare, în acest caz lucrul forțelor de tensiune este nul, iar singurele forțe care efectuează lucru mecanic sunt forțele de greutate, care sunt forțe conservative. Acest rezultat permite scrierea conservării energiei mecanice pentru sistemul analizat.	0,5 + 0,25
B	2,50 p
Notând cu h distanța inițială de la corp la cui, conservarea energiei mecanice între cele două stări ale sistemului se scrie $mgh = Mgx_1 + mg(h - y_1),$ adică $my_1 = Mx_1.$	0,5 0,25
Din conservarea lungimii firului	0,5



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

$h + l = \sqrt{l^2 + y_1^2} + (h - x_1),$	
rezultă $x_1 = \sqrt{l^2 + y_1^2} - l.$	0,25
În concluzie, $y_1 = \frac{2mMl}{M^2 - m^2}$	0,5
Lungimea minimă a firului este $L_{min} = \sqrt{l^2 + y_1^2},$	0,25
adică $L_{min} = l \frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2}.$	0,25
C	4,50 p
Energia potențială a sistemului într-o stare oarecare este $E_p = Mgx + mg(h - y),$ unde $x = \sqrt{l^2 + y^2} - l,$ adică $E_p = Mg\sqrt{l^2 + y^2} - Mgl + mg(h - y).$	0,25 0,25
Această energie este minimă pentru $y_0 = \frac{l}{\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}}$	0,5



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

având expresia $E_{p,min} = mgh - mgl \left(\frac{M}{m} - \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1} \right)$	0,25
Energia cinetică totală a sistemului în această stare este $\frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv_0'^2}{2} = mgl \left(\frac{M}{m} - \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1} \right)$	0,5
Derivând expresia $x = \sqrt{l^2 + y^2} - l$ în raport cu timpul, rezultă $v' = \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}} v,$ care, scrisă pentru starea căutată, devine $v_0' = \frac{m}{M} v_0$	0,5
așa încât $v_0 = \sqrt{2gl \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m} + 1} \left(\frac{M}{m} - \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1} \right)}$	0,25
Ecuatiile de mișcare pentru cele două corpuri sunt: $ma = mg - T \cos \theta = mg - T \frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}}$	0,5
și $Ma' = T - Mg$	0,5
Derivând în raport cu timpul relația dintre vitezele celor două corpuri se obține	0,5



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

relația dintre accelerații	
$a' = \frac{v^2}{\sqrt{l^2 + y^2}} + \frac{ya}{\sqrt{l^2 + y^2}} - \frac{y^2 v^2}{(l^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{l^2 v^2}{(l^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ya}{\sqrt{l^2 + y^2}}$	
În starea cerută, relația dintre accelerații devine	0,25
$a'_0 = \left(\frac{m}{M}\right)^3 \frac{v_0^2}{l} \left[\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1\right]^{\frac{3}{2}} + \frac{ma_0}{M}$	
Înlocuind aici expresiile accelerațiilor din ecuațiile de mișcare, scrise pentru $y = y_0$, rezultă	0,25
$T_0 = Mg \left\{ 1 + 2 \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 \left(\frac{M}{m} - \sqrt{\left(\frac{M}{m} \right)^2 - 1} \right) \right\}$	
oficiu	1 p
TOTAL	10 p



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"

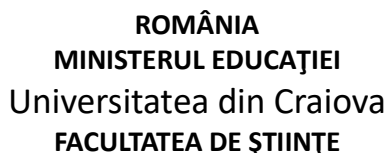
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,

Anul I de studii

-Bareme-

Problema III

Etapale rezolvarii problemei	Barem
a) $\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ $U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}$ Energia mecanica totala a meteoritului se conserva: $\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const.}$ Momentul cinetic fata de centrul Pamantului se conserva: $\vec{L}_F(O) = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \text{const.}$ $L_F(O) = mrv \sin(\vec{r}, \vec{v}) = \text{const.}$ Explicitarea legilor de conservare: $\frac{mv_0^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r_0} = \frac{mv_m^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r_m}$ $mr_0 v_0 \sin \theta = mr_m v_m \sin 90^\circ$ $\gamma M = gR^2$ $r_m v_m = 8R\sqrt{gR} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow v_m = \frac{4R\sqrt{gR}}{r_m}$ $\frac{gR}{2} - \frac{gR^2}{8R} = \frac{16R^2 \cdot gR}{2r_m^2} - \frac{gR^2}{r_m}$ Ecuatia pentru r_m: $3r_m^2 + 8Rr_m - 64R^2 = 0$ cu solutia $r_m = \frac{4}{3}(\sqrt{13} - 1)R = 3,474R \cong 3,5R = 22.400 \text{ km}$ $\Rightarrow v_m = \frac{3\sqrt{gR}}{\sqrt{13} - 1} = 9211 \text{ m/s}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.50 0.50 0.50 0.25
Total punctul a)	4



-Bareme-

b) Conservarea momentului cinetic între A și B: $m_S r_A v_{Af} = m_S r_B v_B \Rightarrow v_{Af} = 1,75 v_B$ Conservarea energiei între A și B $\frac{m_S v_{Af}^2}{2} - \gamma \frac{M m_S}{r_A} = \frac{m_S v_B^2}{2} - \gamma \frac{M m_S}{r_B}$ $\Rightarrow v_{Af}^2 - v_B^2 = 2 \gamma M \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \dots = \frac{3 g R}{7}$ $\Rightarrow v_B = 3649 \text{ m/s}$ Pentru durata transferului aplicăm legea III a lui Kepler: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \pi^2}{\gamma M} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \pi^2 a^3}{\gamma M}}$ $\Rightarrow t_{AB} = T / 2$ $a = \frac{r_A + r_B}{2} = \frac{5,5 R}{2}$ $\Rightarrow t_{AB} = 11.456 \text{ s} = 3,182 \text{ h}$	0.25 0.5 0.5 0.25 0.50 0.25 0.50 0.25
Total punctul b)	3
c) Viteza după ciocnirea plastică a celor două corpuri: $V = \frac{m v_m - m_S v_B}{m + m_S} = 3495 \text{ m/s}$ Se compară V cu viteza unui satelit al Pământului care se mișcă pe o traiectorie circulară cu raza r_m: $v_{B, \text{circ}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_B}} = 4276 \text{ m/s}$ Deoarece $V < v_{B, \text{circ}}$ rezultă că corpul format prin ciocnire intră pe o orbită eliptică. Semiaxa mare a elipsei o determinăm scriind conservarea energiei în punctul B, la trecerea de pe traiectoria inițială pe cea eliptică: $\frac{(m + m_S) V^2}{2} - \gamma \frac{M(m + m_S)}{r_B} = -\gamma \frac{M(m + m_S)}{2a}$ $\Rightarrow 2a = \frac{\gamma M}{\frac{\gamma M}{r_B} - \frac{V^2}{2}} = \frac{g R^2}{\frac{g R^2}{r_B} - \frac{V^2}{2}}$ $\Rightarrow r_{\min} = 2a - r_{\max} = 2a - r_B = 11.032 \text{ km}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Universitatea din Craiova
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

Str. Al.I.Cuza, nr.13, tel. 40.51.41.37.28, fax: 40.51.41.26.73



Concursului Național Studentesc de Fizică "Dragomir HURMUZESCU"
Ediția a IX a, Craiova, 21.05.2021,
Anul I de studii
-Bareme-

Deoarece $r_{min} > R$ corpul format prin ciocnire NU va cadea pe Pamant.	0.25
Total punctul c)	2
Punctaj din oficiu	1
Punctaj total	10