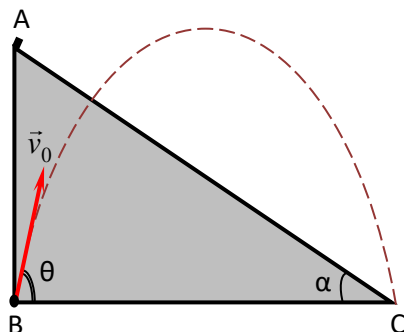


**Concursul Național studențesc „Dragomir Hurmuzescu”**  
**Etapa locală**  
**Iași 12 martie 2016**

**Subiectul I**



Două corpuri punctiforme A și B pornesc în același moment, unul din vârful planului înclinat (v. fig.), al cărui unghi cu orizontala este  $\alpha$ , iar celălalt de la nivelul solului, fiind aruncat cu viteza inițială  $v_0$  - necunoscută, ce face unghiul  $\theta$  cu orizontala. Corpurile se mișcă în plane paralele (astfel încât corpul B să nu se poată ciocni cu planul înclinat). Ambele corpuri intersectează dreapta suport a muchiei de la baza planului înclinat (intersecția acestei drepte cu planul desenului este punctul C) la același moment de timp și cu aceeași viteză. Să se determine valorile unghiurilor  $\alpha$  și  $\theta$ .

*Subiect propus de asist.univ.dr. Laura VELICU*

**Subiectul al II-lea**

Pe suprafața orizontală netedă a gheții stă în repaus o scândură de masă  $M = 1$  kg și lungime  $l = 1$  m, la capătul căreia stă o pisică de masă  $m = 2$  kg. Cu ce viteză minimă față de gheață  $v_{min}$  trebuie să sară pisica pentru a cădea la celălalt capăt al scândurii? Se dă valoarea accelerației gravitaționale  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Se consideră că pisica se mișcă prin aer fără frecare.

*Subiect propus de asist.univ.dr. Radu APETREI*

**Subiectul al III-lea**

Un corp de masă  $m$  este lansat vertical în sus, de la suprafața Pământului, cu viteza  $v_0$ . Corpul întâmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei,  $F = -kv^2$ . Să se afle înălțimea maximă  $h$  la care ajunge corpul, precum și viteza  $v_f$  cu care revine în punctul de lansare.

*Subiect propus de asist.univ.dr. Radu APETREI*

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2 respectiv 3, se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 2 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare dintre cele trei subiecte se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Rezolvare și barem - problema 1

**Subiectul I**

Parțial Punctaj

10 p

**Corpurile ajung în același timp:**

$$v_1 = v_0 = at_1 = gt_1 \sin \alpha \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g \sin \alpha} \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_0}{g \sin \alpha} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \Rightarrow 2 \sin \theta = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (1) \\ t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \end{array} \right.$$

3 p

**Corpurile parcurg aceeași distanță pe OX:**

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{gt_1^2 \sin \alpha}{2} \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{gt_1^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2 \sin^2 \alpha} \sin \alpha \cos \alpha \\ s_1 = \frac{b}{\cos \alpha} \end{array} \right\} \cos \alpha = 2 \cos \theta \quad (2)$$

$$b = (v_0 \cos \theta) \cdot 2t_u = (v_0 \cos \theta) \cdot 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta$$

3 p

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sin \theta = \frac{1}{\sin \alpha} \\ \cos \alpha = 2 \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \sin^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ 4(1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} \Rightarrow 4(1 - \cos^2 \theta)(1 - 4 \cos^2 \theta) = 1 \\ 16 \cos^4 \theta - 20 \cos^2 \theta + 3 = 0 \end{array} \right.$$

1,5 p

$$\cos^2 \theta = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 192}}{32} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos^2_1 \theta = 1,07569 \\ \cos^2_2 \theta = 0,17431 \end{array} \right.$$

1,5 p

$$\cos \theta = \sqrt{0,17431} = 0,41750 \Rightarrow \theta = \arccos(0,41750) = 65,32^\circ$$

$$\cos \alpha = 2 \cos \theta = 0,835 \Rightarrow \alpha = \arccos(0,835) = 33,38^\circ$$

**Oficiu**

1 p

barem - problema 2

1. Din oficiu	1 pct
2. Realizarea unei figuri adecvate	1 pct
3. Scrierea expresiei bătaii pe care o realizează pisica, $b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ , unde $v_0$ este viteza pisicii și $\alpha$ este unghiul făcut de vectorul $\vec{v}_0$ cu planul orizontal	1 pct
4. Sesizarea faptului că scândura se mișcă pe orizontală cu viteza $v'$ în sens contrar mișcării pisicii și scrierea conservării impulsului pe direcție orizontală, $mv_0 \cos \alpha = Mv'$	1,5 pct
5. Găsirea expresiei distanței pe care o parcurge scândura în sens contrar deplasării pisicii, $l' = \frac{m}{M} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	1,5 pct
6. Din ecuația $b = l - l'$ , după înlocuiri, se deduce expresia vitezei	2 pct

$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{(1 + \frac{m}{M}) \sin 2\alpha}}$	
7. Punerea condiției de minim pentru $v_0$ ( $\sin 2\alpha = 1$ , adică $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad)	1 pct
8. Găsirea expresiei vitezei $v_{0\min} = \sqrt{\frac{gl}{(1 + \frac{m}{M})}}$ , și a valorii $v_{0\min} \approx 1,8$ m/s	1 pct
<b>Total</b>	<b>10 pct</b>

barem - problema 3

1. Din oficiu	1 pct
2. Scrierea principiului al II-lea al dinamicii pentru urcarea corpului	0,5 pct
3. Găsirea relației $\ddot{x}dx = \dot{x}d\dot{x}$	1 pct
4. Găsirea expresiei $h = \frac{m}{2k} \ln \frac{g + \frac{k}{m} v_0^2}{g}$	3 pct
5. Scrierea principiului al II-lea al dinamicii pentru coborârea corpului	0,5 pct
6. Găsirea expresiei $v_f = v_0 \sqrt{\frac{g}{g + \frac{k}{m} v_0^2}}$	4 pct
<b>Total</b>	<b>10 pct</b>