Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VIII-a, etapa locală, Iași, 30 martie 2019
Subiecte – anul II

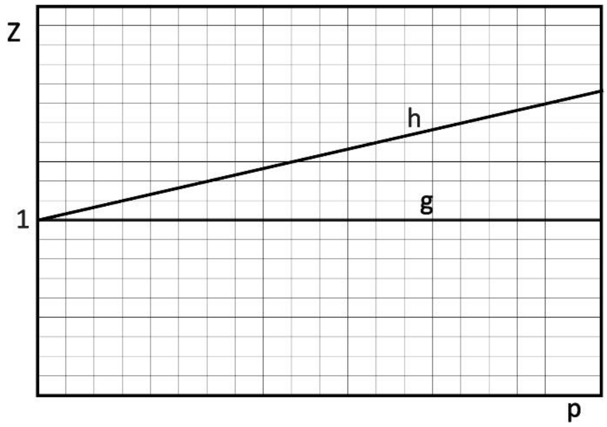
Problema I (10 puncte)

Pentru descrierea comportării izoterme a gazelor rale în domenii largi de presiune, se folosesc diverse ordine de aproximație ale ecuației de stare scrisă ca o serie infinită de termeni sub forma

$$Z = \frac{pV}{\nu RT} = A + Bp + Cp^2 + \cdots.$$

Pentru aproximația de ordinul n se rețin din această sumă primii $n+1$ termenii (până la termenul ce conține puterea n a lui p). Pe cale experimentală se găsește că în limita $p \to 0$, toate gazele au o comportare universală corespunzătoare gazului ideal.

1) Să se găsească coeficienții A și B pentru un gaz în
   a) modelul gazului ideal;
   b) modelul sferelor rigide fără interacțiune;
   c) modelul Van der Waals.
2) Să se scrie ecuația de stare pentru gazele g și h ale căror izoterme (la temperatura T) intr-un interval mare de presiuni, sunt indicate în diagrama de mai jos.



3) Să se descrie comportarea celor două gaze într-un experiment de tip Joule-Thomson. Se cunoaște expresia generală a coeficientului Joule-Thomson

$$\mu_{JT} = \left(\frac{dT}{dp}\right)_H = \frac{\alpha T - 1}{\nu C_p}$$

unde $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$ este coeficientul de dilatare al gazului.

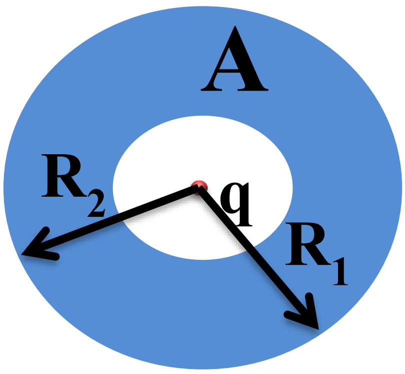
Subiect propuse de:
Conf.dr. Cristian Baban

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VIII-a, etapa locală, Iași, 30 martie 2019

Subiecte – anul II

Problema a II - a (10 puncte)

Se consideră un sistem format dintr-o sarcină punctiformă pozitivă q și un înveliș sferic A cu raza interioară R_1 și raza exterioară R_2. Sarcina q este poziționată în centrul învelișului A așa cum este reprezentat în figura alăturată. Să se reprezinte grafic intensitatea câmpului electric E și potențialul V în funcție de distanța r față de centrul sferei în următoarele cazuri:



a) Corpul A este conductor și neutru;
b) Corpul A este conductor și încărcat cu sarcina pozitivă Q.
c) Corpul A este dielectric și încărcat uniform cu sarcina negativă $-q$ (egală în modul cu cea din centrul sferei);

Subiect propuse de:
asist. dr. Leontin PĂDURARIU

Problema a III - a (10 puncte)

Se consideră o particulă de masă m care se deplasează într-un plan sub acțiunea unei forțe centrale de forma:

$$\vec{F}(r) = \left[-\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r^3}\right]\vec{u}_r \ , \qquad (1)$$

unde k și k' sunt constante (k > 0).

Utilizând ecuațiile Lagrange de speța a II-a, să se determine :
a) Numărul gradelor de libertate și expresia lagrangeanului în coordonate polare r, θ;
b) Ecuațiile diferențiale ale mișcării; Arătați că momentul cinetic $\vec{K}$ este constant în timpul mișcării ($|\vec{K}| = l$), unde l = constant).
c) Ecuația traiectoriei în coordonate polare, r = r (θ), considerând că $l^2 > -mk'$.

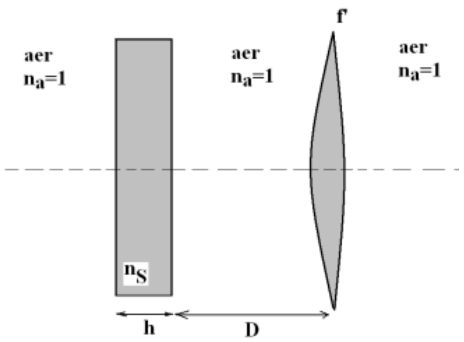
Subiect propus de:
Lect. Dr. Iordana AȘTEFĂNOAEI

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VIII-a, etapa locală, Iași, 30 martie 2019

Subiecte – anul II

Problema a III - a (10 puncte)

4. Un sistem optic centrat este fomat dintr-o lamă cu fețe plan paralele și o lentilă subțire convergentă, ambele plasate în aer. Lama este din sticla cu indicele de refracție n_S și are grosimea h. Lentila are distanta focala imagine f'.



Să se determine:
a) pozițiile focarelor sistemului
b) pozițiile punctelor nodale ale sistemului
c) pozițiile planelor principale

Subiect propuse de:
lect. dr. Cătălin AGHEORGHIESEI și lect. dr. Bogdănel MUNTEANU

Problema 1 Rezolvare

1)
a) gaz ideal

$$pV = \nu RT$$

$$Z = \frac{pV}{\nu RT} = 1, \qquad A = 1, B = 0$$

b) modelul sferelor rigide

$$p(V - \nu b) = \nu RT$$

νb fiind volumul propriu al moleculelor.

$$pV = \nu RT + \nu bp$$

$$Z = \frac{pV}{\nu RT} = 1 + \frac{b}{RT}p, \qquad A = 1, B = \frac{b}{RT}$$

c) modelul Van der Waals

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}$$

$$\frac{pV}{\nu RT} = \frac{V}{V - \nu b} - \frac{\nu}{RTV} = 1 + \nu\left(b - \frac{a}{RT}\right)\frac{1}{V} + \left(\frac{\nu b}{V}\right)^2 + \left(\frac{\nu b}{V}\right)^3 + \cdots$$

Din ecuația generală putem scrie

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\nu RT}\frac{p}{1 + Bp + \cdots} = \frac{1}{\nu RT}[p + O(p^2)].$$

Astfel avem

$$\frac{pV}{\nu RT} = 1 + \frac{1}{RT}\left(b - \frac{a}{RT}\right)p + O(p^2), \qquad A = 1, B = \frac{1}{RT}\left(b - \frac{a}{RT}\right).$$

2) Pentru gazul g

$$Z = \frac{pV}{\nu RT} = 1,$$

ceea ce înseamnă că gazul α este ideal.
Pentru gazul h

$$Z = \frac{pV}{\nu RT} = 1 + B(T)p$$

deoarece izotermele sunt drepte care trec prin punctul de coordonate $(0,1)$

3) Pentru gazul g, coeficientul de dilatare este

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{1}{V}\left[\frac{d}{dT}\left(\frac{\nu RT}{p}\right)\right]_p = \frac{\nu R}{pV} = \frac{1}{T}.$$

Coeficientul Joule-Thomson este nul, temperatura gazului rămâne constanta indiferent de diferența de presiune.
Pentru gazul h avem

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \frac{1}{V}\left\{\frac{d}{dT}\left[\frac{\nu RT}{p}(1 + Bp)\right]\right\}_p = \frac{\nu R}{pV}(1 + Bp) + \frac{\nu RT}{V}\frac{dB}{dT} = \frac{1}{T} + \frac{p}{1 + Bp}\frac{dB}{dT}.$$

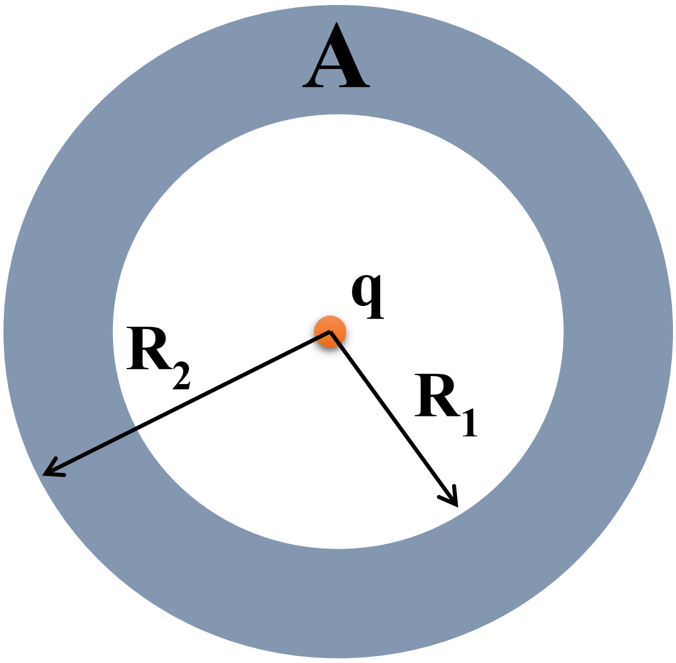
Coeficientul Joule-Thomson este

$$\mu_{JT} = \frac{\alpha T - 1}{\nu C_p} = \frac{1}{\nu C_p}\frac{p}{1 + Bp}\frac{dB}{dT}.$$

Panta izotermelor pentru gazul h este pozitivă deci $B > 0$. Comportarea coeficientului Joule-Thomson este data de derivata lui B în raport cu temperatura. Dacă derivata este negativă coeficientului Joule-Thomson este negativ deci gazul se încălzește iar dacă derivata este pozitivă coeficientului Joule-Thomson este pozitiv deci gazul se răcește (într-un proces de tip Joule-Thomson gazul trece de la presiune ridicată la presiune scăzută deci presiunea scade). Cele două domenii de temperatură sunt despărțite de o temperatură de inversiune care se obține din condiția ca derivata lui B să se anuleze. Atfel la temperaturi scăzute (sub temperatura de inversiune) B trebuie sa fie crescător iar la temperaturi ridicate (peste temperatura de inversiune) trebuie sa fie descrescator.

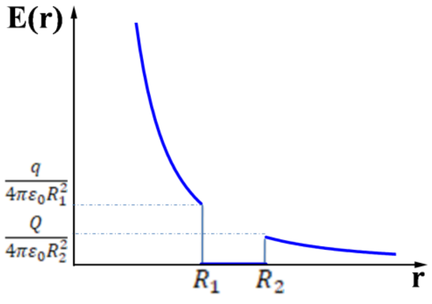
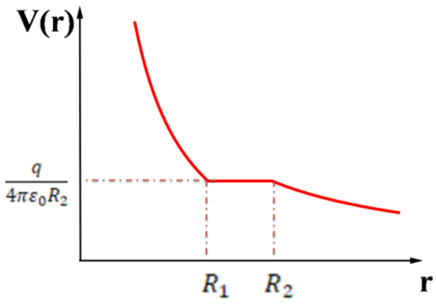
Barem Problemă Electricitate - Faza Locală Iași 2019

Se consideră un sistem format dintr-o sarcină punctiformă pozitivă q și un înveliș sferic A cu raza interioară R_1 și raza exterioară R_2. Sarcina q este poziționată în centrul învelișului A așa cum este reprezentat în figura alăturată. Să se reprezinte grafic intensitatea câmpului electric E și potențialul V în funcție de distanța r față de centrul sferei în următoarele cazuri:

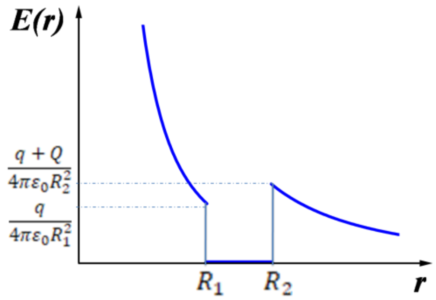


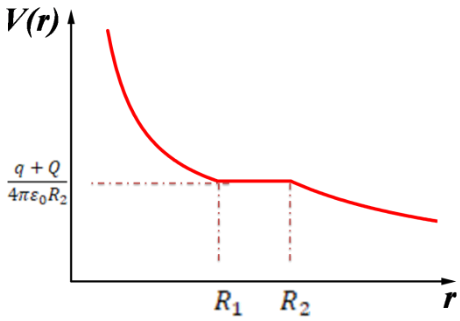
a) Corpul A este conductor și neutru;
b) Corpul A este conductor și încărcat cu sarcina pozitivă Q.
c) Corpul A este dielectric și încărcat uniform cu sarcina negativă $-q$ (egală în modul cu cea din centrul sferei);

a)	Formule generale pentru o singură sferă de rază R încărcată superficial cu sarcina Q: • Intensitatea câmpul electric în interior: $E(r) = 0$ • Potențialul electric în interior: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ • Intensitatea câmpul electric în exterior: $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ • Potențialul electric în exterior: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Formule generale pentru o sarcină punctiformă q: • $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ • $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Corpul A se electrizează prin influență cu sarcina $q_i = -q$ pe fața interioară (de raza R_1) și cu sarcina $q_e = q$ pe fața exterioară (de raza R_2) pentru a rezulta un câmp electric nul în interiorul conductorului.	0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p

	Calculul câmpului electric la diferite distanțe față de sarcina q (centrul sferei): • Pentru $r < R_1$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ • Pentru $R_1 < r < R_2$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$ • Pentru $R_2 < r$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ Calculul potențialului electric la diferite distanțe față de sarcina q: • Pentru $r < R_1$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ • Pentru $R_1 < r < R_2$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ • Pentru $R_2 < r$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ Reprezentări grafice: 	0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.5p **Total: 3.75p**
b)	Conductorul A se electrizează prin influență cu sarcina $q_i = -q$ pe fața interioară (de raza *R₁*) și cu sarcina $q_e = Q + q$ pe fața exterioară (de raza *R₂*) pentru a rezulta un câmp electric nul în interior și pentru a se conserva sarcina totală. Calculul câmpului electric la diferite distanțe față de sarcina q: • Pentru $r < R_1$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ • Pentru $R_1 < r < R_2$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$ • Pentru $R_2 < r$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ Calculul potențialului electric la diferite distanțe față de sarcina q: • Pentru $r < R_1$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{Q+q}{R_2}\right)$ • Pentru $R_1 < r < R_2$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ • Pentru $R_2 < r$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p 0.25p

Reprezentări grafice:





0.5p

Total: 2.25p

c) Corpul A este încărcat cu densitatea de sarcină: $\rho = -\frac{3q}{4\pi(R_2^3-R_1^3)}$ — 0.25p

Pentru determinarea câmpului electric la diferite distanțe r față de centrul sferei se utilizează teorema lui Gauss: $E \cdot 4\pi r^2 = q_{int}/\varepsilon_0$, unde q_{int} reprezintă sarcina din interiorul sferei cu raza r. — 0.25p

Calculul câmpului electric:

- Pentru $r < R_1$: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ — 0.25p
- Pentru $R_1 < r < R_2$: $E(r) = \frac{q+\rho\frac{4\pi(r^3-R_1^3)}{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\frac{R_2^3-r^3}{R_2^3-R_1^3}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}\left(\frac{R_2^3}{r^2}-r\right)$ — 0.25p
- Pentru $R_2 < r$: $E(r) = \frac{q-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$ — 0.25p

Calcul potențialului se face utilizând relația $V = -\int E(r)dr$

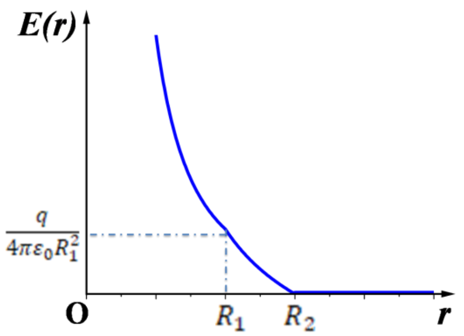
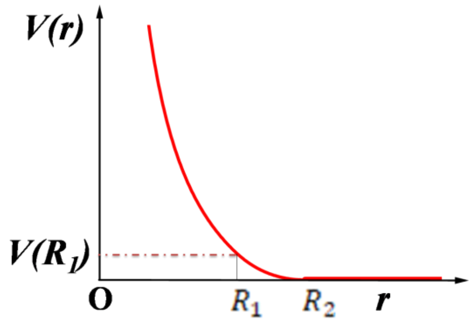
- Pentru $R_2 < r$: $V(r) = 0$ — 0.25p
- Pentru $R_1 < r < R_2$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}\left(\frac{R_2^3}{r}+\frac{r^2}{2}\right) + C_1$, unde C_1 se calculează din condiția la limită $V(r = R_2) = 0$. — 0.25p

  $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}\left(\frac{R_2^3}{r}+\frac{r^2}{2}-\frac{3R_2^2}{2}\right)$ — 0.25p
- Pentru $r < R_1$: $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$, unde $C_2 = V(R_1) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}\left(\frac{R_2^3}{R_1}+\frac{R_1^2}{2}-\frac{3R_2^2}{2}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = -\frac{3q(R_2^2-R_1^2)}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}$ — 0.25p

  $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{3q(R_2^2-R_1^2)}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3-R_1^3)}$

Reprezentări grafice:

0.5p

	 	**Total: 3p**
		Oficiu: 3p

	Parţial	Punctaj
Problema (Mecanică Teoretică)		**10**
a) Numărul gradelor de libertate și expresia lagrangeanului în coordonate polare r, θ;		**3p**
- stabilirea numărului gradelor de libertate al sistemului;	1p	
Mişcarea sistemului are loc în plan – numărul gradelor de libertate este n = 2 iar coordonatele generalizate corespunzatoare sunt $q^1 = r$ şi $q^2 = \theta$.		
- determinarea expresiei funcției Lagrange în coordonatele polare r, θ:	2p	
1p – determinarea energiei potențiale a sistemului $$dV = -dA \leftrightarrow V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{k\prime}{2r^2}$$		
0.5p – determinarea energiei cinetice a sistemului $$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$		
0.5p – determinarea expresiei lagrangeanului: $$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} - \frac{k\prime}{2r^2}$$		
b) Ecuațiile diferențiale ale mișcării arătând că momentul cinetic este constant ($\lvert\vec{K}\rvert = l$).		**3p**
- **scrierea ecuațiilor Lagrange de speța a II-a** corespunzătoare celor 2 coordonate generalizate ***r, θ:*** $$q^1 = r \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$ $$q^2 = \theta \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$	1p	
– **deducerea celor 2 ecuații de mişcare** pentru coordonatele ***r, θ:*** $$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^2} - \frac{k\prime}{r^3} = 0$$ $$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$	1p	

– momentul cinetic este constant ($\vert\vec{K}\vert = l$); Mişcarea particulei de masă m are loc cu moment cinetic constant – după cum rezultă din cea de-a doua ecuație de mişcare $mr^2\dot{\theta} = l =$ constant. $\vec{K} = \vec{r}x\vec{p} = m\left[(r\vec{u}_r)x(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)\right] = \left(mr^2\dot{\theta}\right)\underbrace{(\vec{u}_r x\, \vec{u}_\theta)}_{\vec{k}}$ iar $\vert\vec{K}\vert = mr^2\dot{\theta} = l$	1p	
c) Ecuația traiectoriei în coordonate polare, r = r (θ), considerând că $l^2 > -mk'$.		**3p**
- **notația u =** $\frac{1}{r}$ **și calculul**: $\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} == -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}$ $\ddot{r} = -\frac{l^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$	1p	
– scrierea ecuației $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^3} = 0$ în funcție de u : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{mk'}{l^2}\right)u - \frac{mk}{l^2} = 0\ (*)$	1p	
– rezolvarea ecuației (*) și obținerea legii r(θ);	1p	
0.5 p – soluția: $u(\theta) = A\cos\left(\frac{\theta}{l}\sqrt{l^2 + mk'}\right) + \frac{mk}{l^2+mk'} = \frac{1}{r(\theta)}$ **0.5 p – soluția:** $r(\theta) = \left(A\cos\left(\frac{\theta}{l}\sqrt{l^2 + mk'}\right) + \frac{mk}{l^2+mk'}\right)^{-1}$ A este o constanta oarecare		
Oficiu		**1p**

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VIII-a, etapa locală, Iași, 30 martie 2019

Bareme – anul I

	Parţial	Punctaj
Problema de optică		**10**
$R_{11} = 1;\ R_{12} = -\frac{h}{n_S} - D;\ R_{22} = \frac{1}{f'};\ R_{22} = -\frac{h}{n_S f'} - \frac{D}{f'} + 1$	**4,5**	
$X_F = -\frac{nR_{22}}{R_{21}} = -f' + D + \frac{h}{n_S}$ $\qquad X'_{F'} = \frac{n'R_{11}}{R_{21}} = f'$	**1,5**	
$X_N = -\frac{nR_{22} - n'}{R_{21}} = D + \frac{h}{n_S}$ $\qquad X'_{N'} = \frac{n'R_{11} - n}{R_{21}} = 0$	**1,5**	
$X_P = \frac{n(R_{22}-1)}{R_{21}}$ $\qquad X'_{P'} = \frac{n'(R_{11}-1)}{R_{21}}$	**1,5**	
Oficiu		**1p**