Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017
Subiecte – anul I

Problema I (10 puncte)

Viteza unui vehicul de masă m, care se deplasează rectiliniu, variază după legea $v = c\dfrac{t}{t+\tau}$, unde v este viteza, t – timpul, iar c şi τ sunt constante pozitive.

a) Reprezintă grafic legea vitezei şi dedu semnificaţia fizică a constantelor c şi τ.

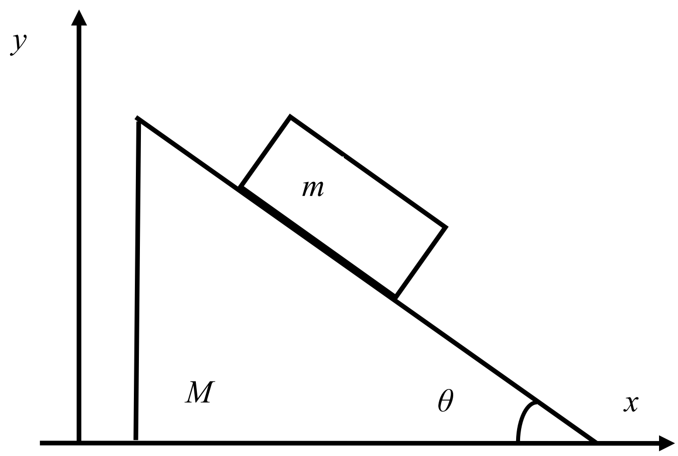
b) Neglijând forţele de rezistenţă la înaintare, calculează lucrul mecanic al forţei de tracţiune pe intervalul $[0, t]$.

c) Dedu intervalul de timp dintre momentele la care forța de tracțiune și puterea iau valori maxime.

Asist. univ. dr. Radu APETREI, Iași

Problema a II - a (10 puncte)

Un corp este aşezat pe un plan înclinat (de unghi θ), iar planul înclinat este aşezat pe un plan orizontal (vezi figura).



a) Consideraţi că planul înclinat este fixat, iar corpul este lăsat să alunece liber, fără frecare, de-a lungul acestuia. Care este valoarea unghiului θ pentru care proiecţia pe orizontală a deplasarii corpului (pe o distanţă dată) se face în timp minim?

În continuare, consideraţi că planul înclinat, de masă M, nu mai este fixat şi poate aluneca fără frecare pe suportul său orizontal. Corpul de masă m este ţinut pe planul înclinat aflat în repaus şi la un moment dat este lăsat liber (pe planul înclinat). Pentru un moment ulterior oarecare (în timpul mişcării planului înclinat şi a corpului):

b) Desenaţi forţele care apar asupra corpului şi planului înclinat şi justificaţi relaţia

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x + A_x},$$

unde a_x, a_y sunt componentele acceleraţiei corpului, iar A_x este acceleraţia planului înclinat, faţă de sistemul de referinţă fix, *xy*, din figură. Explicaţi ce se întâmplă cu poziţia centrului de masă al sistemului corp+plan înclinat.

c) Calculaţi a_x, a_y, A_x şi forţa normală dintre corp şi planul înclinat. Se poate desprinde corpul de planul înclinat?

Conf. univ. dr. Tiberius O. CHECHE, București

Problema a III - a (10 puncte)

Pe o masă orizontală se află trei discuri identice, având raza R = 2 cm și masa m_0 = 10 g (în figura 1 este arătată o vedere de sus). Discurile 2 și 3 se ating și linia care unește centrele lor este perpendiculară pe pe traiectoria discului 1. Discul 1 se deplasează cu viteza v_0 = 11,545 m/s către punctul de contact dintre discurile 2 și 3, ciocnindu-le pe acestea simultan.

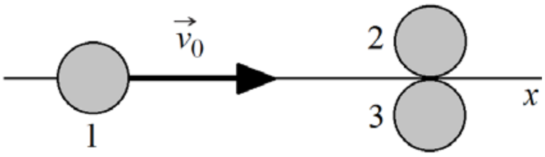


Figura 1.

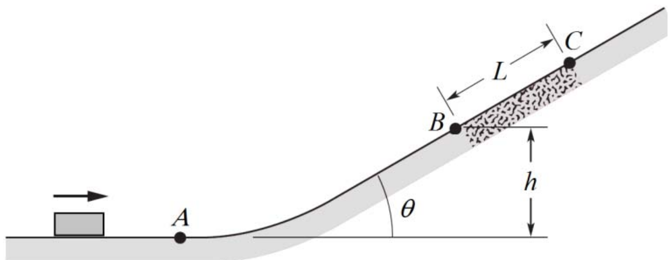


Figura 2.

a) Presupunem că ciocnirile sunt elastice, neglijăm frecarea dintre discuri și dintre discuri și planul orizontal. Determinați vitezele discurilor după ciocnire și unghiurile dintre viteze și axa *x*.

b) După ciocnire, discul 2 își continuă mișcarea de-a lungul unui plan înclinat cu unghiul θ = 30^0 față de orizontală (a se vedea figura 2). La început discul se mișcă pe planul înclinat fără frecare (porțiunea *A-B*). Atunci cînd discul atinge înălțimea h = 2,0 m el intră pe o porțiune cu lungimea L = 0,75 m pe care se mișcă cu frecare (μ = 0,40). În cazul în care discul ajunge în punctul *C* (acolo unde se termină porțiunea cu frecare) determinați viteza lui în acest punct; dacă discul nu ajunge în punctul *C* determinați înălțimea maximă față de orizontală până la care urcă discul pe planul înclinat. Se va lua g = 9,8 m/s^2.

c) Discul 3, aflat în mișcare rectilinie, ajunge sub o pipetă din care curge un jet subțire de vopsea. Presupunem că toată vopseaua care ajunge pe disc rămâne pe suprafața superioară a acestuia. În timpul încărcării cu vopsea discul se mișcă în continuare datorită inerției, fără frecare cu planul orizontal, dar cu viteză din ce în ce mai mică. Știind că încărcarea cu vopsea se produce cu debitul masic λ = 0,5 g/s, să se determine viteza discului la ieșirea de sub pipetă.

conf. univ. dr. Paul BARVINSCHI, Timișoara

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017
Bareme – anul I

Problema I

Din oficiu	1 pct
a) Grafic	1 pct
c – viteza maximă, când $t \to \infty$	1 pct
τ – timpul după care $v = \dfrac{c}{2}$	1 pct
b) $dL = F \cdot dx = m \cdot a \cdot dx = m \cdot a \cdot v \cdot dt$	
Accelerația este $a = \dfrac{c\tau}{(t+\tau)^2}$	
$L = mc^2\tau \int_0^t \dfrac{t}{(t+\tau)^3} dt$	
$L = \dfrac{1}{2} m \dfrac{c^2 t^2}{(t+\tau)^2} (= \dfrac{1}{2} mv^2)$	3 pct
c) $F = ma = \dfrac{mc\tau}{(t+\tau)^2}$ și are valoarea maximă la $t = 0$	1 pct
$P = Fv = \dfrac{mc^2\tau t}{(t+\tau)^3}$ și are valoarea maximă la $t = \dfrac{\tau}{2}$	1 pct
$\Delta t = \dfrac{\tau}{2}$	1 pct
Total	**10 pct**

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017

Bareme – anul I

Problema a II-a

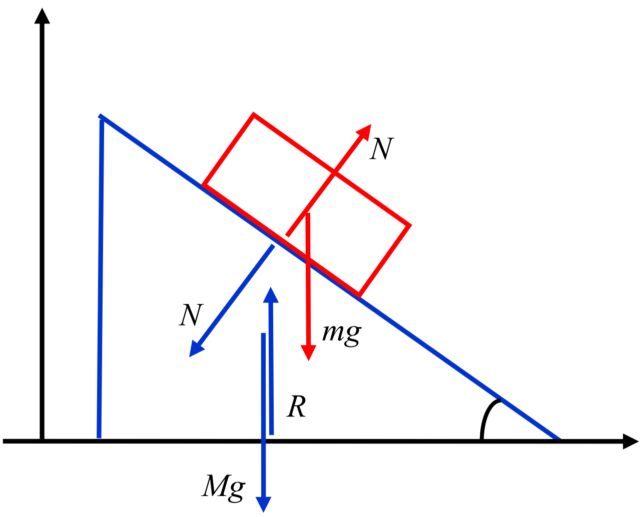
a)

$$a_x = \frac{G\sin\theta}{m}\cos\theta = g\sin\theta\cos\theta = \frac{g\sin 2\theta}{2}. \quad (1) \qquad 1.5$$

$x = \dfrac{a_x t^2}{2}$ si timpul este minim daca a_x este maxim. 1

$$a_{x\max} = \frac{g}{2} \iff \theta = \pi/4. \qquad (2) \qquad 0.5$$

b)



unde N este forta normala (actiune-reactiune) dintre planul inclinat si corp, iar R este reactiunea planului orizontal. 0. 75

Forţele care apar în sistemul corp+plan inclinat sunt constante. 0.25

Fata de planul inclinat, acceleratia corpului (notata cu ‘prim’) are componentele

$$a_x^{'} = a_x + A_x, \; (a_x, A_x > 0), \qquad (3) \qquad 0.25$$

$$a_y^{'} = a_y. \qquad (4) \qquad 0.25$$

Corpul se misca pe planul inclinat, deci

$$\tan\theta = \frac{d_y}{d_x}, \qquad (5) \qquad 0.25$$

unde d_x, d_y sunt distante parcurse de corp in sistemul de referinta al planului inclinat pe directiile *x*, respectiv *y*.

$$d_x = \frac{a_x^{'} t^2}{2}, \qquad (6) \qquad 0.25$$

$d_y = \frac{a_y^{'} t^2}{2}$. (7) 0.25

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{a_y^{'}}{a_x^{'}} = \frac{a_y}{a_x + A_x}$ (8) 0.25

Obs.: Se poate considera, in mod echivalent, discutia pentru viteza corpului pe planul inclinat fata de acesta.

Impulsul sistemului corp+plan inclinat fata de sistemul de referinta fix se conserva pe directie orizontala (fortele externe sunt verticale, iar fortele interne nu modifica poziţia centrului de masa). In consecinta, poziţia centrului de masă al sistemului corp+plan înclinat ramane fixa. 0.5

c)

$mg - N\cos\theta = ma_y$ (9) 0.5

$N\sin\theta = ma_x$ (10) 0.5

$N\sin\theta = MA_x$ (11) 0.5

$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x + A_x}$

$a_x = \frac{Mg\sin 2\theta}{2(m\sin^2\theta + M)} \xrightarrow{M>>m} g\sin\theta\cos\theta$ - similar ec. (1) (12) 0.3

$a_y = \frac{(m+M)g\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M} \xrightarrow{m>>M} g$ - cadere libera (13) 0.3

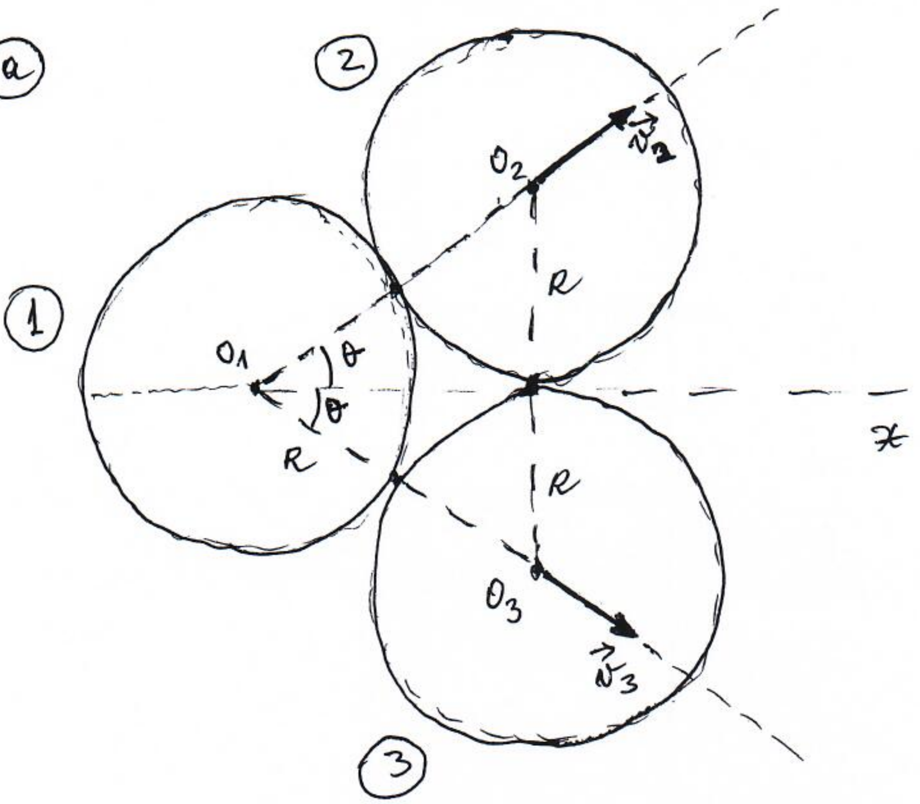
$A_x = \frac{mg\sin 2\theta}{2(m\sin^2\theta + M)}$ (14) 0.3

$N = \frac{mMg\cos\theta}{m\sin^2\theta + M} \xrightarrow{M\to\infty} mg\cos\theta$ - similar cazului a) (15) 0.3

Corpul nu se desprinde de plan deoarece $N = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2$, ceea ce inseamna o cadere libera. 0.3

1 punct din oficiu.

(a)



$\Delta O_1O_2O_3 \rightarrow$ echilateral !

$\Rightarrow \theta = 30°$

$\Rightarrow v_2 = v_3 = v$ = vitezele discurilor 2 și 3 după ciocnire.

$v_1 = V$ = viteza discului 1 după ciocnire.

Conservarea impulsului: $m_0 v_0 = m_0 V + 2 m_0 v \cos\theta$ (1)

Conservarea energiei cinetice: $\frac{m_0 v_0^2}{2} = \frac{m_0 V^2}{2} + 2\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right)$ (2)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} V = v_0 - 2v\cos\theta$ → ridicăm la pătrat și substituim în (2):

$\Rightarrow v = \frac{2 v_0 \cos\theta}{1 + 2\cos^2\theta} = 7,998 \simeq 8 \frac{m}{s}$

$V = v_0 - 2v\cos\theta = -2,311 \frac{m}{s}$

$\theta_2 = 30°$

$\theta_3 = -30°$

$\theta_1 = 180°$

(b) $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gh} = \sqrt{\underbrace{8^2 - 2\cdot 9{,}8\cdot 2}_{24{,}8}} = \underline{4{,}980\ \frac{m}{s}}$

$E_c(B) = \frac{m_0 v_B^2}{2}$

Notăm cu d distanța pe care o parcurge discul pe planul înclinat dacă există frecare pe toată lungimea sa, după punctul B.

$\Delta E_c = L_{G_t} + L_{F_f}$

$0 - E_c(B) = -(m_0 g \sin\theta)\cdot d - (\mu m_0 g \cos\theta)\cdot d$

$\Rightarrow d = \frac{v_B^2}{2}\cdot \frac{1}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} = \underline{1{,}49\ m} > L = 0{,}75\ m$!

$\Rightarrow$ Discul depășește punctul C.

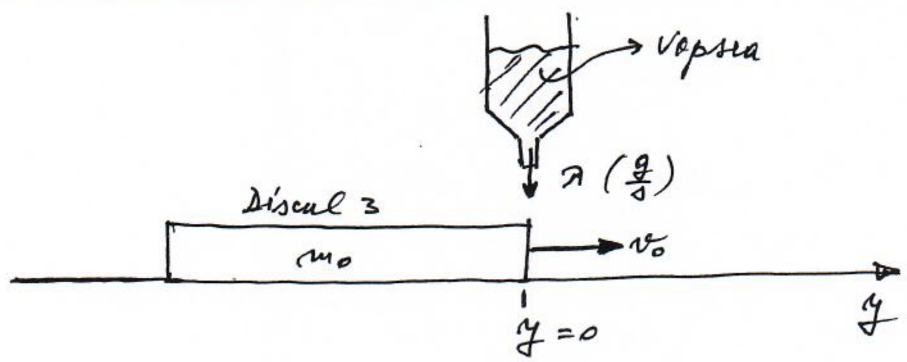
$\Rightarrow$ Trebuie să calculăm viteza în punctul C, v_C.

$\Delta E_c = L_{G_t} + L_{F_f}$

$\frac{m_0 v_C^2}{2} - \frac{m v_B^2}{2} = -(mg\sin\theta)\cdot L - (\mu mg\cos\theta)\cdot L$

$\Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gL(\sin\theta + \mu\cos\theta)} = \underline{3{,}5\ \frac{m}{s}}$

(c)



- Pentru ușurința scrierii, la acest punct notăm cu v_0 viteza discului 3 după ciocnire: $v_0 = 8\ \frac{m}{s}$.
- Alegem direcția pe care se deplasează discul ca axă y.
- Alegem $t = 0$ și $y = 0$ atunci când capătul din dreapta al discului ajunge sub vârful pipetei.

- Notăm : $m = m(t)$ = masa discului la momentul t

$v = v(t)$ = viteza discului la momentul t

- Pe orizontală nu acționează nici o forță asupra discului, deci variația componentei impulsului pe orizontală va fi zero:

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0$$

$\Rightarrow mv = \text{constant}$

$$\Rightarrow \boxed{m(t)\,v(t) = m_0 v_0} \qquad (1)$$

Dar masa m se mărește cu $\lambda\ \left(\frac{g}{s}\right)$, deci putem scrie:

$$\frac{dm}{dt} = \lambda \qquad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$dm = \lambda\, dt$$

$$\int_{m_0}^{m} dm = \lambda \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{m(t) = m_0 + \lambda t} \qquad (3)$$

Substituim (3) în (1) și obținem dependența lui v de t:

$$\boxed{v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t}} \qquad (4)$$

Pentru a determina viteza discului la ieșirea de sub pipetă trebuie să determinăm timpul necesar discului să parcurgă distanța $D = 2R$.

$\Rightarrow$ Trebuie să aflăm mai întâi cum depinde spațiul parcurs de timp : $y = y(t)$.

Din definiția vitezei avem :

$v = \frac{dy}{dt}$ $\rightarrow$ separăm variabilele și integrăm:

$$dy = v\, dt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t v\, dt = \int_0^t \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t}\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda t}{m_0}\right)} \qquad (5)$$

Timpul T în care discul străbate distanța $D = 2R$ se va determina astfel:

$$D = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda T}{m_0}\right) \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_0}{\lambda}\left(e^{\frac{\lambda D}{m_0 v_0}} - 1\right)} \qquad (7)$$

Viteza discului la momentul T se determină substituind (7) în (4)

$$\boxed{v(T) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda T}} \qquad (8)$$

Numeric: $D = 2R = 4\ cm$

$m_0 = 10\ g$

$v_0 = 8\ \frac{m}{s} = 800\ \frac{cm}{s}$

$\lambda = 0{,}5\ \frac{g}{s}$

$$\Rightarrow \frac{\lambda D}{m_0 v_0} = \frac{0{,}5\,(g/s)\cdot 4\,(cm)}{10\,(g)\cdot 800\,(cm/s)} = \frac{2}{8000} = \underline{\underline{2{,}5\cdot 10^{-4}}}$$

$$\frac{m_0}{\lambda} = \frac{10\,(g)}{0{,}5\,(g/s)} = \underline{\underline{20\,s}}$$

$$\Rightarrow T = 20\cdot\Big(\underbrace{e^{\frac{2}{8000}}}_{1{,}0003} - 1\Big) = \underline{\underline{0{,}006\ s}}$$

$$\Rightarrow v(T) = \frac{10(g)\cdot 800\,(cm/s)}{10(g) + 0{,}5\,(g/s)\cdot 0{,}006\,(s)} = 799{,}76\ \frac{cm}{s} = \underline{\underline{7{,}9976\ \frac{m}{s}}}.$$

GATA!