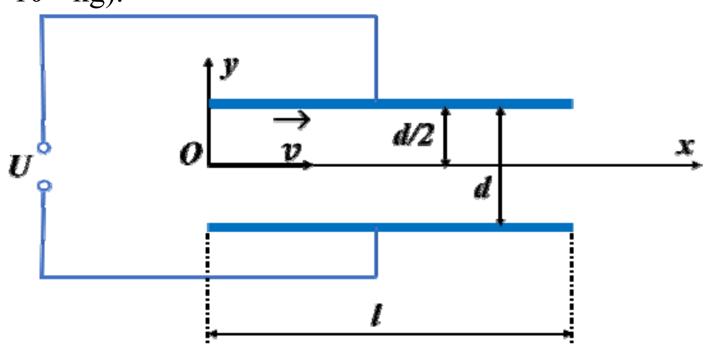
Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017
Subiecte – anul II

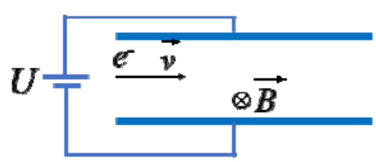
Problema I (10 puncte)
Se considera aerul atmosferic ca fiind un gaz ideal aflat in echilibru adiabatic (pentru care presiunea si densitatea unei paturi orizontale de aer aflata la o anumita altitudine sunt legate prin ecuatia adiabatei).

1. Sa se determine in functie de presiunea p(z), densitatea ρ(z) si altitudinea z, ecuația diferentiala care descrie echilibrul mecanic al unei paturi orizontale de aer (3p)
2. Cunoscand densitatea ρ0 si respectiv presiunea p0 la o altitudine considerata drept origine, exponentul adiabatic γ si acceleratia campului gravitational (uniform) g, sa se determine presiunea aerului in functie de z. (3p)
3. Sa se deduca variatia temperaturii aerului atmosferic in functie de altitudine. Se considera cunoscute marimile specificate la punctul 2 si in plus temperatura T0 la altitudinea considerata drept origine. (3p)

Problema a II - a (10 puncte)
Un electron intră în spațiul dintre armăturile unui condensator plan cu viteza v=1000 m/s, paralelă cu electrozii, exact la mijlocul distanței dintre electrozi. Lungimea electrozilor este l=20 cm, distanța dintre electrozi este d=5 cm, iar electrozii sunt supuși unei diferențe de potențial U (vezi figura de mai jos). Se cunosc sarcina elementară ($e=1.6\cdot10^{-19}$ C) și masa electronului ($m=9.1\cdot10^{-31}$kg).



a. Dacă în interiorul condensatorului acționează și un câmp magnetic uniform cu inducția $B=10^{-2}$ T, orientat ca în figura de mai jos, calculează tensiunea U care trebuie aplicată condensatorului pentru ca electronul să traverseze regiunea dintre electrozi fără a fi deviat.



b. Se aplică condensatorului o tensiune constantă, a cărei valoare absolută este U=1 μV, dar cu polaritatea comutabilă. Dacă la intrarea electronului în condensator tensiunea este pozitivă (+ pe electrodul superior și – pe electrodul inferior), să se calculeze momentul de timp la care ar trebui produsă comutarea polarității pentru ca electronul să părăsească condensatorul pe aceeași axă pe care a intrat (axa Ox în prima figură).

c. Se aplică condensatorului un semnal periodic de forma $U=U_0\cos(\omega t)$, unde U_0=1 mV reprezintă amplitudinea tensiunii, iar ω este pulsația. Să se calculeze frecvența minimă a semnului periodic pentru care electronul părăsește condensatorul printr-un punct de pe axa Ox. La momentul t=0 electronul se află în punctul O.

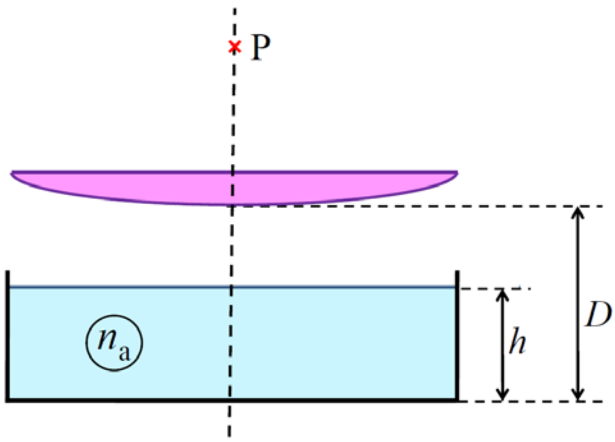
Problema a III - a (10 puncte)

Un pendul este realizat prin suspendarea unui corp punctiform cu masa m prin intermediul unui resort nedeformat cu lungimea l_0 și constanta de elasticitate k. Corpul se poate mişca doar în plan vertical.

a) să se aleagă un set de coordonate generalizate corespunzător și să se scrie funcția Lagrange;
b) să se determine ecuațiile Lagrange;
c) să se rezolve ecuațiile Lagrange în aproximația micilor oscilații.

Problema a IV - a (10 puncte)

O lentilă subțire plan-convexă, având convergența de 5 δ, se așează deasupra unui vas cu apă, axa optică a lentilei fiind pe direcție verticală (după cum se observă în figură). Distanța dintre lentilă și fundul vasului este D = 45 cm, iar indicele de refracție al apei este n_a = 4/3.



Determinați:
a) distanțele focale ale sistemului compus din lentilă și apă;
b) adâncimea h a apei din vas, pentru care imaginea unui punct luminos P, aflat la distanța de 40 cm deasupra lentilei, se formează exact pe fundul vasului;

c) indicele de refracție al unui lichid transparent, care, înlocuind apa din vas și având același volum cu cel al apei, va menține imaginea punctului luminos pe fundul vasului, dacă îndepărtăm punctul luminos cu 3 mm față de lentilă.

Barem

1. Deoarece patura orizontala de aer de inaltime dz si arie S este in echilibru, suma fortelor verticale care actioneaza asupra ei este nula:

$$Sp(z) - Sp(z+dz) - dm(z)g = 0$$

unde $dm(z) = S\rho(z)dz$. Astfel ecuatia diferentiala ceruta este data de:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g. \tag{1}$$

Punctul 1..3p

2. Folosind ecuatia adiabatei

$$p(z)\rho(z)^{-\gamma} = p(0)\rho(0)^{-\gamma}$$

si integrand ecuatia (1):

$$\int_{p_0}^{p(z)} p^{-1/\gamma} dp = -\rho_0 g p_0^{-1/\gamma} \int_0^z dz$$

se obtine:

$$p(z) = p_0 \left[1 - \frac{(\gamma-1)\rho_0 g z}{\gamma p_0}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Punctul 2..3p

3. Variatia temperaturii T in functie de z se obtine direct folosind ecuatia adiabatei in variabilele T si p

$$T(z) = T_0 \left[\frac{p(z)}{p_0}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{2}$$

si astfel

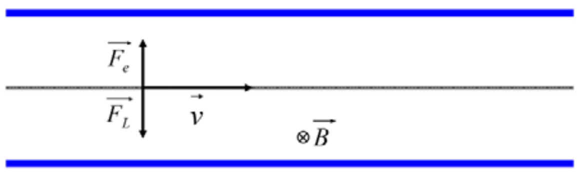
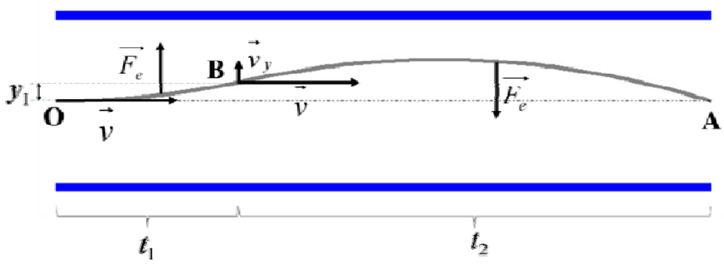
$$T - T_0 = -T_0 \frac{(\gamma-1)\rho_0 g z}{\gamma p_0}, \tag{3}$$

Punctul 3...3p

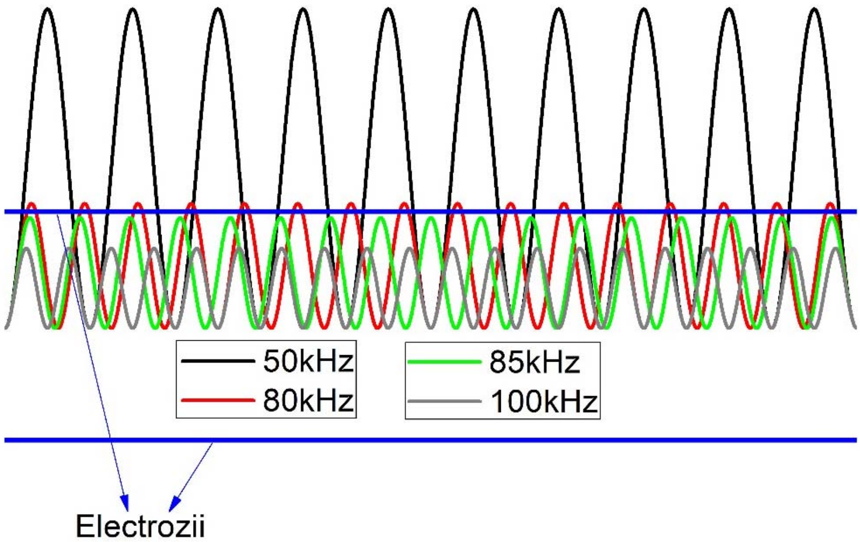
Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017
Bareme – anul II

Problema a II-a

Barem problema **Electricitate și Magnetism**		
Subpunct	Rezolvare	Punctaj
a)	**Reprezentarea forțelor:** 	1p
	Forța electrică: $F_e = \dfrac{eU}{d}$ **Forța Lorentz:** $F_L = evB$	1p
	Calculul tensiunii: $\vec{F_e} + \vec{F_L} = 0 \Rightarrow \dfrac{eU}{d} = evB \Rightarrow U = vBd$ Rezultat numeric: $U = 0{,}5\ \text{V}$	1p
b)	**Reprezentarea traiectoriei și a forțelor:**  Se consideră două intervale de timp: (i) timpul t_1 în care electronul se deplasează pe curba OB, iar forța electrică acționează în sus, (ii) timpul t_2 în care electronul se deplasează pe curba BA și forța electrică acționează în jos. Mișcarea electronului este compusă din două tipuri de mișcări: o mișcare uniformă pe axa Ox și o mișcare uniform variată pe axa Oy. Accelerația electronului este constantă în modul și este descrisă de ecuația: $a = \dfrac{eU}{md}$	1p
	Ordonata electronului după parcurgerea curbei OB:	0.25p

	$y_1 = \frac{at_1^2}{2}$	
	Componenta verticală a vitezei electronului după parcurgerea curbei OB: $v_y = at_1$	0.25p
	Ordonata electronului după parcurgerea curbei BA: $y_2 = y_1 + v_y t_2 - \frac{at_2^2}{2}$ Înlocuind y_1 și v_y , și ținând cont că la ieșirea electronului din condensator y_2=0, se obține: $\frac{at_1^2}{2} + at_1 t_2 - \frac{at_2^2}{2} = 0$	0.5p
	Se rezolvă un sistem de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases} t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2 = 0 \\ t_1 + t_2 = t \end{cases}$, unde t este timpul total în care electronul parcurge regiunea dintre electrozi. Substituind, $t_2 = t - t_1$, se obține o ecuație de gradul 2: $2t_1^2 - 4tt_1 + t^2 = 0$, a cărei soluție este: $t_1 = t\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	0.5p
	Din mișcarea uniformă a electronului pe axa Ox, se poate determina timpul total $t = l/v$. Rezultat final: $t_1 = \frac{l}{v}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Rezultat numeric: $t_1 = 5.858 \cdot 10^{-5}$ s	0.5p
c)	Forța care acționează asupra electronului: $F = \frac{eU_0}{d}\cos(\omega t)$ Accelerația electronului: $a = \frac{dv_y}{dt} = \frac{eU_0}{md}\cos(\omega t)$	0.5p

	Calculul dependenței componentei verticale a vitezei de timp: $v_y = \int_0^t a dt = \frac{eU_0}{md}\int_0^t \cos(\omega t)dt = \frac{eU_0}{md}\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)\Big\vert_0^t = \frac{eU_0}{md\omega}\sin(\omega t)$	0.5p
	Calculul dependenței ordonatei electronului de timp: $y = \int_0^t v_y dt = \frac{eU_0}{md\omega}\int_0^t \sin(\omega t)dt = \frac{eU_0}{md\omega}\left(-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right)\Big\vert_0^t = \frac{eU_0}{md\omega^2}(1-\cos(\omega t))$	0.5p
	Substituind, $t = x/v$, se obține ecuația traiectoriei electronului: $y(x) = \frac{eU_0}{md\omega^2}(1-\cos(\omega x/v))$ Câteva traiectorii obținute pentru diferite frecvențe sunt reprezentate în figura de mai jos. (Reprezentarea grafică a traiectoriei electronului nu este obligatorie pentru a obține punctaj maxim) 	0.5p
	Calculul frecvenței limită din condiția ca electronul să nu se ciocnească cu electrodul superior Distanța maximă parcursă pe axa Oy se obține pentru $\cos(\omega x/v) = -1$: $y_{\max} = \frac{2eU_0}{md\omega^2}$ La limită, această distanță este egală jumătatea distanței dintre electrozi: $\frac{2eU_0}{md\omega_l^2} = \frac{d}{2} \Rightarrow \omega_l^2 = \frac{4eU_0}{d^2 m} \Rightarrow \omega_l = 2\pi\nu_l = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{eU_0}{m}} \Rightarrow \nu_l = \frac{1}{\pi d}\sqrt{\frac{eU_0}{m}}$ Rezultat numeric: $\nu_l = 84{,}41\,\text{kHz}$	0.5p

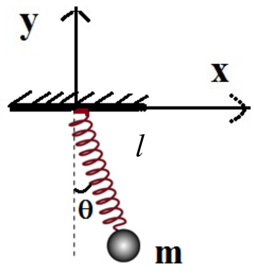
	Calculul frecvenței din condiția ca electronul să iasă din condensator printr-un punct de pe axa Ox: $y(l)=0 \Rightarrow \cos(\omega l/v)=1 \Rightarrow \frac{\omega l}{v}=2n\pi \Rightarrow \omega=2\pi\nu=2n\pi\frac{v}{l} \Rightarrow \nu=n\frac{v}{l}$, unde n este un număr natural. Această frecvență trebuie sa fie mai mare decât 84,41 kHz. **Rezultate numerice:** n=17 **și** $\nu_{\min}=85\,\text{kHz}$	0.5p
Puncte din oficiu		1p

Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași
Facultatea de FIZICĂ

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017

Bareme – anul II

Problema a III-a



1p - oficiu

Punctul a) = 3p:

0.5p scrierea coordonatelor corpului de masă m: $x - l\sin\theta$ şi $y = -l\cos\theta$, ţinând seama de sistemul de coordonate dat.

0.5p calculul vitezei corpului $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2$.

0.5p scrierea relaţiei pentru energia cinetică T a corpului**:**

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

Energia potenţială V - obţinerea relaţiei finale:

$$V = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 - mgl\cos\theta$$

0.5 p componenta elastică a energiei potenţiale:

$$V_e = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$$

0.5 p = componenta gravitaţională a energiei potenţiale:

$$V_g = -mgl\cos\theta$$

0.5p = scrierea relaţiei $L = T - V$ şi determinarea expresiei pentru L:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + mgl\cos\theta$$

Punctul b) = 3p

0.5p - Scrierea ecuaţiilor Lagrange de speţa a II-a (expresiile generale) pentru coordonatele r şi $\boldsymbol{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \text{ şi } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

1.25p - Determinarea ecuaţiei diferenţiale a mişcării din ecuaţia Lagrange de speţa a II-a în variabila l :

$$m\ddot{l} - ml\dot{\theta}^2 + k(l - l_0) - mg\cos\theta = 0$$

1.25p - Determinarea ecuaţiei diferenţiale a mişcării din ecuaţia Lagrange de speţa a II-a în variabila $\boldsymbol{\theta}$:

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

Punctul c) = 3p

1p - Condiţia de echilibru şi expresiile coordonatelor poziţiei de echilibru a sistemului (l_e, θ_e) .

Condiţia de echilibru**:** $\ddot{\theta} = \ddot{l} = 0$ şi $\dot{l} = \dot{\theta} = 0$ conduce la expresiile coordonatelor poziţiei de echilibru: $\theta_e = 0$ şi $l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$

2p - Soluţiile ecuaţiilor de mişcare în aproximaţia 1) unghiurilor mici **sau** 2) a deplasărilor radiale mici de la poziţia de echilibru (l_e, θ_e):

0.5 p - Condiţia pentru unghiuri θ mici:
$\sin\theta \cong \theta$; $\cos\theta = 1$; $\dot{\theta}^2 = 0$

sau

0.5 p - Condiţia pentru deplasări radiale $l - l_e$ de la poziţia de echilibru - mici impune $l - l_e \ll l_e$. Notând ca variabilă: $\rho = l - l_e$ - se obţine:

0.5p ecuaţia pentru ρ:

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m}\right)\rho = 0$$

sau

0.5p ecuaţia pentru θ:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{r_e}\right)\theta = 0$$

1 p soluţia pentru ρ:

$$\rho = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t + \varphi_1\right)$$, deci soluţia pentru *l*:

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t + \varphi_1\right)$$

1 p soluţia pentru θ

$$\theta = B\cos\left(\sqrt{\frac{kg}{kl+mg}}\ t + \varphi_2\right).$$

A, B, φ_1 şi φ_2 constante de integrare obţinute din condiţiile iniţiale.

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017

Bareme – anul II

Problema a IV-a

Barem de corectare

Soluția I (metoda matricială)

Start .... **1 punct**

a) Matricea lentilei se exprimă sub forma:

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'_L} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_L} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C_L & 1 \end{pmatrix} \quad \text{.................................} \quad \textbf{1 punct}$$

unde C_L este convergența lentilei, f_L este distanța focală obiect a lentilei:

$$f_L = \frac{1}{C_L} = \frac{1}{5\ \mathrm{m}^{-1}} = 20\ \mathrm{cm}$$

iar f'_L este distanța focală imagine a lentilei:

$$f'_L = -f_L = -20\ \mathrm{cm}.$$

Matricea sistemului se exprimă sub forma:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{n_a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D-h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C_L & 1 \end{pmatrix} \quad \text{.........................} \quad \textbf{0,25 puncte}$$

unde

$$Q = \frac{n_{aer} - n_a}{\infty} = \frac{1 - n_a}{\infty} = 0 \quad \text{...} \quad \textbf{0,25 puncte}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_a}\right) & D - h + \frac{h}{n_a} \\ -C_L & 1 \end{pmatrix} \quad \text{..........................} \quad \textbf{0,5 puncte}$$

Distanțele focale ale sistemului sunt:

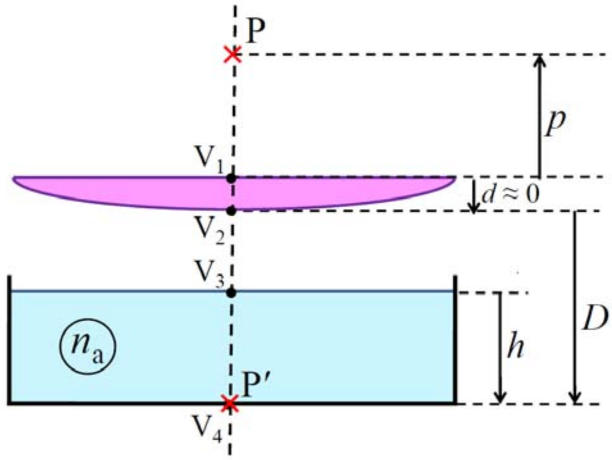
$$f = -\frac{n_{aer}}{S_{21}} = -\frac{1}{S_{21}} = -\frac{1}{-C_L} = f_L = 20\ \mathrm{cm} \quad \text{.......................} \quad \textbf{0,5 puncte}$$

$$f' = \frac{n_{aer}}{S_{21}} = \frac{1}{S_{21}} = \frac{1}{-C_L} = f'_L = -20\ \mathrm{cm} \quad \text{..........................} \quad \textbf{0,5 puncte}$$

b)

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017

Bareme – anul II



Conform figurii, matricea de transfer între punctul obiect P și punctul imagine P ' se exprimă sub forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_a}\right) & D - h + \frac{h}{n_a} \\ -C_L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ .... **0,5 puncte**

unde $p = V_1P$ este distanța la care se află punctul obiect P față de sistem, iar $p' = V_4P' = 0$ este distanța la care se află punctul imagine P′ față de sistem. Astfel se obține:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_a}\right) & -p\left[1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_a}\right)\right] + D - h + \frac{h}{n_a} \\ -C_L & pC_L + 1 \end{pmatrix}$$ .... **1 punct**

Pentru ca sistemul să fie stigmatic în raport cu punctele P și P′, trebuie ca elementul de matrice M_{12} să satisfacă condiția $M_{12} = 0$, adică:

$$-p\left[1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_a}\right)\right] + D - h + \frac{h}{n_a} = 0$$ .... **1 punct**

de unde se obține:

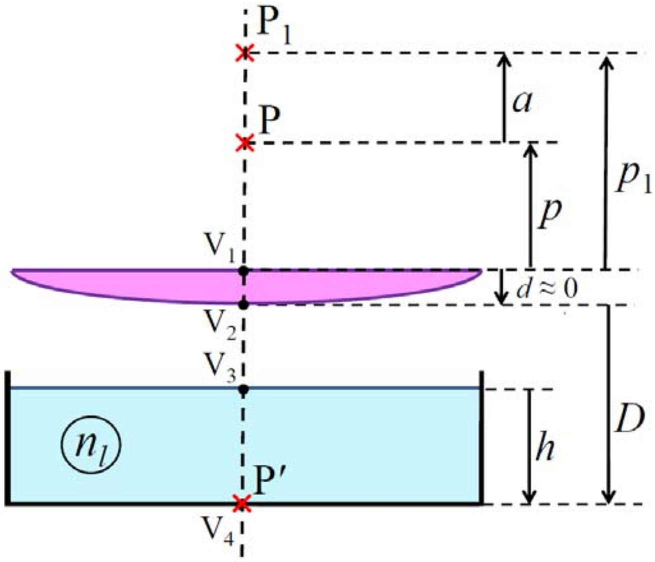
$$h = \frac{D(pC_L + 1) - p}{\left(1 - \frac{1}{n_a}\right)(pC_L + 1)}$$ .... **0,25 puncte**

$h = 20\ \text{cm}$ .... **0,25 puncte**

c)

Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a VI-a, Iași, 7 – 9 aprilie 2017

Bareme – anul II



Înlocuind apa cu același volum de lichid cu indicele de refracție n_l, și îndepărtând punctul luminos cu distanța a = - 3mm, astfel încât P să ajungă în P_1, conform figurii, avem:

$(-p_1) = (-p) + (-a)$, adică $p_1 = p + a$ .... **0,5 puncte**

Pentru ca sistemul să fie stigmatic în raport cu punctele P_1 și P′, trebuie ca elementul M'_{12} al matricii de transfer M' între punctele conjugate P_1 și P′, să satisfacă condiția $M'_{12} = 0$.

$$M'_{12} = -(p + a)\left[1 - C_L\left(D - h + \frac{h}{n_l}\right)\right] + D - h + \frac{h}{n_l} = 0$$ .... **2 puncte**

de unde se obține:

$$n_l = \frac{h[C_L(p + a) + 1]}{p + a + (h - D)[C_L(p + a) + 1]}$$ .... **0,25 puncte**

$n_l = 1{,}36$ .... **0,25 puncte**

Soluția II (metoda clasică)

Start .... **1 punct**

a) Dacă C_L este convergența lentilei, atunci distanța focală obiect a lentilei este:

$$f_L = \frac{1}{C_L} = \frac{1}{5\ \mathrm{m^{-1}}} = 20\ \mathrm{cm}$$

iar distanța focală imagine a lentilei este:

$f'_L = -f_L = -20$ cm.

Distanța focală obiect *f* a sistemului format din lentilă și stratul de apă, este dată de relația:

$$f = -\frac{f_L f_a}{\gamma}$$

unde $f_a = \infty$ este distanța focală a stratului de apă, iar $\gamma = -\infty$ este interstițiul optic.

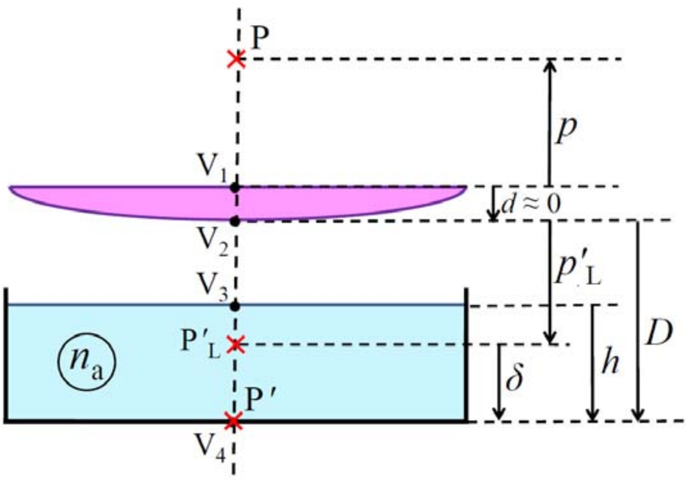
$f = -\frac{f_L \infty}{-\infty} = f_L = 20$ cm. .... **1,5 puncte**

Distanța focală imagine *f′* a sistemului este:

$$f' = \frac{f'_L f'_a}{\gamma} = \frac{(-f_L)(-f_a)}{\gamma} = \frac{f_L \infty}{-\infty} = -f_L = -f$$

$f' = -20$ cm. .... **1,5 puncte**

b)



Conform figurii, în absența stratului de apă, între poziția *p* a punctului obiect P și poziția p'_L a punctului imagine P'_L dat de lentilă, avem relația:

$$\frac{1}{p'_L} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f_L}$$

$$p'_L = \frac{p f_L}{p + f_L}$$

$p'_L = 40$ cm .... **1 punct**

Stratul de apă deplasează imaginea P'_L dată de lentilă cu distanța δ, astfel încât imaginea finală dată de sistem va fi în P'. Conform figurii:

$\delta = D - p'_L$ .... **0,5 puncte**

Pe de altă parte, δ este dat de relația:

Bareme – anul II

$\delta = h\left(1 - \frac{1}{n_a}\right)$ .... **1 punct**

Obținem:

$h = \frac{n_a(D - p'_L)}{n_a - 1}$ .... **0,25 puncte**

$h = 20$ cm .... **0,25 puncte**

c) Înlocuind apa cu același volum de lichid cu indicele de refracție n_l, și îndepărtând punctul luminos cu distanța a = - 3mm, astfel încât P să ajungă în P_1, noua poziție p_1 a punctului obiect va fi dată de relația:

$(-p_1) = (-p) + (-a)$, adică $p_1 = p + a$ .... **0,5 puncte**

Poziția imaginii date de lentilă va fi:

$p'_{1L} = \frac{(p+a)f_L}{(p+a)+f_L}$ .... **0,25 puncte**

$p'_{1L} = 39,7$ cm .... **0,25 puncte**

Stratul de apă deplasează imaginea dată de lentilă cu distanța δ_1, astfel încât imaginea finală dată de sistem să fie în P′.

$\delta_1 = D - p'_{1L}$ .... **0,25 puncte**

$\delta_1 = 5,3$ cm .... **0,25 puncte**

$\delta_1 = h\left(1 - \frac{1}{n_l}\right)$ .... **0,5 puncte**

Obținem:

$n_l = \frac{h}{h - \delta_1} = \frac{h}{h - D + p'_{1L}}$ .... **0,5 puncte**

$n_l = 1,36$ .... **0,5 puncte**