

Concursul Național studențesc „Dragomir Hurmuzescu”
Etapa locală - aprilie 2021

Subiectul I

Un corp cu masa $m = 2$ kg este lăsat să cadă liber de la înălțimea $h = 75$ m. Interacțiunea cu aerul este neglijabilă, iar valoarea accelerației gravitaționale este $g = 10$ m/s². Pe ultima porțiune a mișcării, în ultimele $\tau = 2$ s înainte de a atinge solul, asupra corpului acționează o forță verticală \vec{F} care-l frânează uniform, astfel încât în momentul în care ajunge pe sol viteza corpului este nulă. Determinați:

- (4 p) legea vitezei (pe cele două porțiuni) și desenați graficul vitezei funcție de timp;
- (3 p) timpul de cădere până în momentul începerii frânării;
- (2 p) valoarea modulului accelerației corpului în timpul celor $\tau = 2$ s de frânare uniformă și valoare modulului forței \vec{F} .

subiect propus de lect. univ. dr. Radu APETREI

Subiectul II

Un autoturism cu masa $m = 1000$ kg traversează un pod cu viteza constantă $v = 20$ m/s. Podul este unul parabolic, având capetele la aceeași cotă. Distanța dintre capetele podului, măsurată pe orizontală, este $D = 100$ m, iar supraînălțarea podului, la mijloc, față de capetele sale, este $H = 5$ m. Considerând $g = 10$ N/kg, determinați:

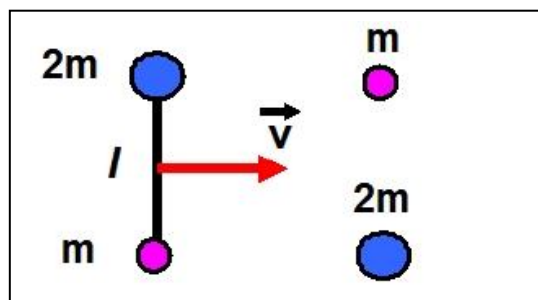
- (2,5 p) ecuația $y(x)$ a curbei care descrie profilul podului;
- (4,0 p) expresia forței de tracțiune a motorului la intrarea autoturismului pe pod, adică în punctul $(x, y) = (0, 0)$ și calculează valoarea ei numerică;
- (2,5 p) expresia forței de reacțiune normală cu care podul acționează asupra autoturismului, în momentul în care autoturismul se află la mijlocul podului, și calculează valoarea ei numerică.

Obs: Dacă îți este utilă, poți utiliza relația de calcul a razei de curbura a unei curbe $y(x)$: $R = \left| \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right|$, unde $y' = \frac{dy}{dx}$, iar $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

subiect propus de conf. univ. dr. Sebastian POPESCU

Subiectul III

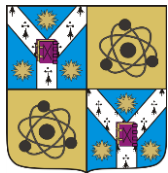
La capetele unei tije rigide, de masă neglijabilă, cu lungimea l , se află două bile de mici dimensiuni, una cu masa $2m$, iar cealaltă cu masa m . Tija se deplasează pe o suprafață orizontală netedă cu viteză constantă \vec{v} , orientată strict perpendicular pe tijă. La un moment dat bilele se ciocnesc plastic cu două bile identice cu cele de la capetele tije, aflate în repaus pe aceeași suprafață, la distanța l una de alta, dar dispuse invers (vezi figura).



- (4 p) Aflați vitezele bilelor imediat după ciocnire și viteza centrului de masă al sistemului imediat după ciocnire.
- (5 p) Aflați tensiunea din tijă imediat după ciocnire.

subiect propus de lect. univ. dr. Radu APETREI

- Fiecare dintre subiectele 1, 2 respectiv 3, se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
- În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
- Durata probei este de 2 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
- Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
- Fiecare dintre cele trei subiecte se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național studențesc „Dragomir Hurmuzescu”
Etapa locală - aprilie 2021



BAREME

Subiectul I	Parțial	Punctaj
		10
a) Pe porțiunea căderii libere în câmp gravitațional avem $v = gt, y = \frac{1}{2}gt^2$.	1,25	4
Fie t_1 – intervalul de timp al căderii libere. Înainte de a începe acțiunea forței \vec{F} , viteza are valoarea $v_1 = gt_1$, iar distanța parcursă este $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$.	0,25	
Legea vitezei pe porțiunea cu frânare este $v = v_1 - a t$, Unde $a = \frac{G-F}{m}$ este accelerația, G – greutatea, F – modulul forței de frânare. Este necesar ca $F > G$ (mișcare uniform încetinită)	1	
Grafic $v(t)$ 	1,5	
b) Distanța parcursă pe porțiunea cu frânare este $y_2 = \frac{1}{2}v_1\tau = \frac{1}{2}gt_1\tau$	1	3
Putem scrie $h = y_1 + y_2$, adică $h = \frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{1}{2}gt_1\tau$	1	
După înlocuirii numerice și rezolvarea ecuației de gradul II, obținem $t_1 = 3$ s	1	
c) $ a = \frac{v_1}{\tau}, v_1 = gt_1 = 30 \frac{m}{s}, a = 15 \frac{m}{s^2}$	1	2
$F = G + m a $	0,5	
$F = 50$ N	0,5	
Oficiu		1

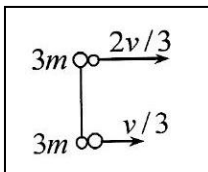
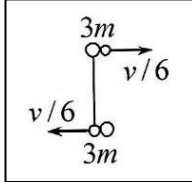
barem propus de lect. univ. dr. Radu APETREI

Subiectul II	Parțial	Punctaj
		10
a) $y = ax^2 + bx + c$	0,5	2,5
Deoarece $y(0) = y(D) = 0$, atunci $c = 0$ și $aD + b = 0$. Cum $y\left(\frac{D}{2}\right) = H$, atunci $H = \frac{D}{2}\left(a\frac{D}{2} + b\right)$	3 x 0,5	
Prin urmare, $y(x) = -\frac{4H}{D^2}x^2 + \frac{4H}{D}x$	0,5	
b) Diagrama forțelor	1	4
$F(x) = mgsin\alpha = mg \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = mg \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}$	1,5	
deci $F(x) = mg \frac{\frac{4H}{D^2}(D - 2x)}{\sqrt{1 + \frac{16H^2}{D^4}(D - 2x)^2}}$	1	

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2 respectiv 3, se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 2 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare dintre cele trei subiecte se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

Prin urmare	$F(0) = \frac{mg}{\sqrt{\left(\frac{D}{4H}\right)^2 + 1}}$	0,25	
Numeric,	$F(0) = 1,96 \text{ kN} \cong 2,0 \text{ kN}$	0,25	
c) Din diagrama corpului liber realizată atunci când autoturismul se află la mijlocul podului, rezultă	$N = mg - \frac{mv^2}{R} = mg \left(1 - \frac{v^2}{Rg}\right),$	1	2,5
unde	$R = \left \frac{(1+y')^2}{y''} \right = \left \frac{\left[1 + \frac{16H^2}{D^4}(D-2x)^2\right]^{3/2}}{-\frac{8H}{D^2}} \right = \frac{D^2}{8H} \left[1 + \frac{16H^2}{D^4}(D-2x)^2\right]^{3/2}.$	1	
Prin urmare, în punctul $\left(\frac{D}{2}, H\right)$, forța de reacțiune normală este	$N\left(\frac{D}{2}\right) = mg \left(1 - \frac{8v^2H}{gD^2}\right).$	0,25	
Numeric,	$N\left(\frac{D}{2}\right) = 8,4 \text{ kN}.$	0,25	
Oficiu			1

barem propus de conf. univ. dr. Sebastian POPESCU

Subiectul III	Parțial	Total
a) Din legea conservării impulsului, scrisă pentru fiecare bilă, $2mv = 3mv_{sus}$ și $mv = 3mv_{jos}$, obținem $v_{sus} = \frac{2}{3}v$ și $v_{jos} = \frac{1}{3}v$, adică $v_{sus} \neq v_{jos}$	2	10
După ciocnire, mișcarea tijei nu va mai fi o translație plan-paralelă. (Vezi figura imediat după ciocnire) În sistemul centrului de masă (SCM), cu originea la mijlocul tijei, vom avea o mișcare de rotație . Față de suprafața pe care se află tija și bilele, centrul de masă (CM) are viteza: $v_{CM} = \frac{1}{2} \left(\frac{2v}{3} + \frac{v}{3} \right) = \frac{v}{2}$		4
b) Față de SCM bilele (cum masa 3m) au vitezele : $v'_{sus} = \frac{2v}{3} - \frac{v}{2} = \frac{v}{6}, \text{ respectiv } v'_{jos} = \frac{v}{2} - \frac{v}{3} = \frac{v}{6}.$		2
Raza cercului este $\frac{l}{2}$. Tensiunea din tijă, T , este egală cu forța centrifugă, $F_{cf} = \frac{mv^2}{R}$. Astfel, $T = \frac{6m}{l} \left(\frac{v}{6}\right)^2 = \frac{mv^2}{6l}$		3
Oficiu		1

barem propus de lect. univ. dr. Radu APETREI

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2 respectiv 3, se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 2 ore din momentul în care s-a terminat distribuția subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare dintre cele trei subiecte se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.