UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” DIN IAŞI

ŞCOALA DOCTORALĂ DE FIZICĂ
DOMENIUL FIZICĂ TEORETICĂ

# TEZĂ DE DOCTORAT

## *Implicații ale teoriei măsurii în descrierea dinamicilor sistemelor fizice*

**Rezumat**

**Conducător ştiinţific:**
**Prof. Univ. Dr. MARICEL AGOP**

**Doctorand:**
**GABRIEL GAVRILUŢ**

**Anul 2022**

În atenţia ………………………………………………………..

UNIVERSITATEA "ALEXANDRU IOAN CUZA" DIN IAŞI

Vă facem cunoscut că în data de 23 SEPTEMBRIE 2022, Ora: 13.00, Sala: L I, domnul GAVRILUŢ GABRIEL va susţine, în şedinţă publică, teza de doctorat cu titlul "***Implicații ale teoriei măsurii în descrierea dinamicilor sistemelor fizice***" în vederea obţinerii titlului ştiinţific de doctor în domeniul fundamental Ştiinţe Exacte, domeniul Fizică.

Comisia are următoarea componenţă:

*Preşedinte*
Directorul Școlii Doctorale, Facultatea de Fizică, Universitatea „Al. I. Cuza" din Iaşi
Prof. Univ. Dr. DIANA MARDARE

*Conducător Ştiinţific*
Facultatea de Fizică, Universitatea „Al. I. Cuza" din Iaşi
Prof. Univ. Dr. MARICEL AGOP

*Referent*
Facultatea de Fizică, Universitatea de Vest, Timişoara
Prof. Univ. Dr. Dumitru VULCANOV

*Referent*
Facultatea de Fizică, Universitatea Politehnică, Bucureşti
Prof. Univ. Dr. Viorel-Puiu PĂUN

*Referent*
Facultatea de Matematică, Universitatea „Al. I. Cuza" din Iaşi
Conf. Univ. Dr. ANCA CROITORU

Teza poate fi consultată la Biblioteca Facultății de Fizică din cadrul Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi

Vă invităm pe această cale să participaţi la şedinţa publică de susţinere a tezei de doctorat.

# Cuprins

# Introducere

Teoria măsurii studiază, în esență, modul în care poate fi atribuită o mărime, unei mulțimi date și care poate fi “măsurată”. Conceptul de măsură este fundamental în matematică, constituind o abstractizare naturală pentru noțiuni comune, cum ar fi cea de masă, distanță, lungime, arie, volum, probabilitate a unui eveniment, sarcină electrică etc. De asemenea, noțiunea de măsură este esențială în teoria probabilităților, iar generalizări ale sale (de exemplu, măsura cuantică) sunt utilizate pe scară largă în fizica cuantică și în fizică, în general.

Recent, teoriei măsurilor neaditive i-a fost acordat un interes din ce în ce mai mare, datorită diverselor sale aplicații într-o gamă largă de domenii. Această teorie generalizată a măsurii este folosită, de exemplu, pentru a descrie diverse situații în care intervin conflicte sau cooperări între anumiți jucători raționali inteligenți, oferind un cadru matematic adecvat pentru a prezice rezultatul procesului. În special, diverse teorii dezvoltate referitoare la atomicitate pentru măsuri neaditive sunt utilizate în teoria jocurilor, probabilități, statistică și inteligență artificială etc.

Pe de altă parte, în ultimele decenii s-a dezvoltat, din considerente de ordin practic, o teorie a multifuncțiilor de mulțime (adică funcții de mulțime cu valori mulțimi). Această categorie specială de aplicații a devenit un instrument important în multe domenii practice, în special în analiza economică, în care tratează probleme ale cererii individuale, echilibru competitiv etc. În particular, funcțiile cu valori intervale, sunt asociate frecvent cu funcțiile care măsoară incertitudinea. Mai precis, măsurile probabilistice cuantice cu valori interval sunt utilizate pentru a studia efectul imperfecțiunilor experimentale și al măsurătorilor de precizie finită.

Prin intersectarea acestor două mari domenii, cel univoc, al teoriei măsurilor neaditive (numite și funcții neaditive de mulțime) pe de o parte, și cel multivoc, al teoriei multifuncțiilor de mulțime pe de altă parte, a luat naștere, în ultimele decenii, o teorie a multifuncțiilor neaditive de mulțime, care a constituit, de altfel, domeniul de interes pentru realizarea acestei teze, în special din perspectiva aplicațiilor, a corelațiilor și a implicațiilor puse în evidență în studiul unor procese fizice.

Prezenta teză de doctorat este structurată în patru capitole. Pentru o prezentare logică și cursivă, la începutul fiecărui capitol am trecut în revistă principalele rezultate în domeniu, inserând, acolo unde este posibil, rezultatele originale ale autorului, atât din punct de vedere matematic, cât și din punct de vedere fizic. Mai precis, pe parcursul întregii prezentări a subiectului, am evidențiat, pe cât posibil, după noțiunile și conceptele introduse sau teoremele demonstrate, interpretările fizice ale acestora, sub titulatura generală Posibile interpretări fizice. De asemenea, la sfârșitul fiecărui capitol, am prezentat in extenso Aplicațiile fizice ale modelului matematic.

În Capitolul 1, am amintit în primele secțiuni principalele noțiuni și rezultate fundamentale din teoria măsurii, necesare dezvoltării capitolelor următoare. Astfel, ne-am referit la anumite clase speciale de mulțimi, după care am amintit diverse tipuri de funcții de funcții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, proprietăți și unele interpretări fizice. Secțiunea următoare este dedicată prezentării importanței studiului fenomenelor fizice în spații de mulțimi, în care un instrument deosebit de util, în special în probleme referitoare (la multi)fractalitate este metrica Hausdorff-Pompeiu. Am amintit principalele proprietăți ale acestei metrici, și, în secțiunea următoare, am trecut de la cazul univoc, al funcțiilor de mulțime, la cazul multivoc, al multifuncțiilor de mulțime, obținând astfel rezultate cu un grad mai mare de generalizare și abstractizare. În acest cadru multivoc, am introdus unele tipuri de multifuncții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, contraexemple, diverse relații de legătură și, de asemenea, corelații, implicații și interpretări din punct de vedere fizic. În ultimele secțiuni ale acestui capitol, am prezentat unele aplicații ale teoriei (multi)funcțiilor neaditive de mulțime, în modelarea unor fenomene cuantice și în studiul sistemelor fizice.

În Capitolul 2, am urmărit obținerea unor generalizări ale noțiunilor de atom, pseudo-atom, atom minimal, de la cazul univoc, al funcțiilor aditive sau neaditive de mulțime, la cazul multivoc, al multifuncțiilor neaditive de mulțime. Această generalizare a fost realizată așadar în două direcții. O primă direcție este dată de faptul că, în loc de funcții de mulțime necesare procesului de așa-zisă “măsurare”, am operat, mai general, cu multifuncții de mulțime. Cea de a doua direcție este dată de corelația pe care am făcut-o, plasând noțiunea de atom în cadrul unor teorii fizice și prezentând posibilele implicații, corelații și aplicații ale acestui concept matematic. De aceea, pentru expunerea logică a acestui capitol, a fost necesară la început o prezentare sintetică a unor concepte esențiale din teoria atomicității. Astfel, am inserat rezultate originale, exemple și contraexemple, interpretări din punct de vedere fizic și relații de legătură pentru diverse tipuri de atomi pentru (multi)funcții neaditive de mulțimi. Mai precis, am analizat dualitatea undă – corpuscul din perspectiva celor două scenarii, scenariul de tip Schrödinger multifractal și scenariul de tip Madelung multifractal, stabilind corelații între acestea. Conceptele și consecințele fundamentale ale teoriei matematice au permis explicitarea in extenso la sfârșitul capitolului a implicațiilor în studiul proceselor fizice, un rol esențial avându-l legătura cu conceptul de (multi)fractalitate, ceea ce ne-a permis, în final, să introducem și să prezentăm în finalul acestei teze unele proprietăți ale unor tipuri de atomicitate fractală.

În Capitolul 3, pentru o expunere logică, a fost necesară o prezentare sintetică în Secțiunile 3.1 și 3.2 a unor concepte și consecințe fundamentale din teoria fractalilor și, mai general, a multifractalilor, din perspectiva teoriei măsurii. Aceste noțiuni teoretice sunt necesare dezvoltării considerațiilor din Secțiunea 3.3, referitoare la diverse tipuri de proceduri matematice operaționale în descrierile de dinamici, precum și a considerațiilor din Secțiunea 3.4, referitoare la unele consecințe ale nediferențiabilității pentru cazul dinamicilor pe varietăți multifractale. Considerațiile din acest capitol sunt absolut necesare pentru abordarea realizată în Capitolul 4 din perspectivă multifractală.

Astfel, în Capitolul 4, după o primă parte introductivă, în Secțiunea 4.2. am expus diferite rezultate în ceea ce privește o teorie fractală a mișcării și am prezentat principalele consecințe ale nediferențiabilității. Ne-am referit la noțiuni precum cea de derivată covariantă de scară, geodezice fractale în reprezentarea de tip Schrödinger, respectiv în reprezentarea de tip hidrodinamic. Secțiunea 4.3. conține rezultate referitoare la modelul lui Barbilian de geometrie diferențială fractală. De asemenea, sunt expuse rezultate referitoare la probabilitățile generate prin intermediul mapărilor armonice. Din această perspectivă, am extins noțiuni din teoria atomicității, la teorii implicând atomicitate fractală și am prezentat unele proprietăți ale atomului minimal fractal.

În cadrul prezentei teze de doctorat, am prezentat rezultate originale, concretizate în 18 lucrări, dintre care 14 lucrări sunt publicate și 4 sunt trimise spre publicare. În aceste lucrări, am operat cu noțiuni matematice și cu diverse concepte fizice, urmărind punerea în evidență, acolo unde este posibil, a legăturilor, implicațiilor și posibilelor corelații și aplicații ale conceptelor matematice în studiul dinamicilor sistemelor fizice.

Menționăm faptul că, din punct de vedere matematic, elementele de noutate pe care le aducem în cadrul acestei teze se înscriu pe trei coordonate:

1. Am generalizat unele concepte și proprietăți cu care se operează în cadrul teoriei măsurilor, trecând de la cazul univoc, al funcțiilor de mulțime, la cazul multivoc, al multifuncțiilor de mulțime;
2. Am realizat trecerea de la cazul aditiv, mult prea restrictiv, la cel neaditiv.

Aceste două demersuri au generat, în unele situații, o serie de dificultăți importante: Pe de o parte, trecerea la cazul multivoc implică, în anumite situații, folosirea relației de incluziune între mulțimi, relație care este doar parțială, și nu totală, așa cum se întâmplă în cazul univoc, în care se folosește relația de ordine. Pe de altă parte, renunțarea la condiția, foarte restrictivă de altfel, de aditivitate, necesită introducerea unor alte proprietăți, mai slabe;

3. Conceptele și rezultatele teoriei matematice elaborate au fost absolut necesare pentru a pune în evidență implicațiile fizice, corelațiile și aplicațiile ale acestora în studiul unor procese fizice.

## Capitolul 1. Elemente de teoria măsurilor univoce și multivoce și aplicații ale acestora în procesele fizice

În primele secțiuni ale acestui capitol, am amintit principalele noțiuni și rezultate fundamentale din teoria măsurii, necesare dezvoltării capitolelor următoare. Astfel, ne-am referit la anumite clase speciale de mulțimi, după care am amintit diverse tipuri de funcții de funcții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, proprietăți și unele interpretări fizice. Secțiunea următoare este dedicată prezentării importanței studiului fenomenelor fizice în spații de mulțimi, în care un instrument deosebit de util, în special în probleme referitoare la (multi)fractalitate, este metrica Hausdorff-Pompeiu. Am amintit principalele proprietăți ale acestei metrici, și, în secțiunea următoare, am introdus unele tipuri de multifuncții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, contraexemple, diverse relații de legătură și, de asemenea, corelații, implicații și interpretări din punct de vedere fizic. În penultimele două secțiuni ale acestui capitol, am prezentat unele aplicații ale teoriei (multi)funcțiilor neaditive de mulțime, în modelarea unor fenomene cuantice. În ultima secțiune, ne-am referit la conceptul de entropie informațională multifractală, ca element de conexiune între funcțiile neaditive de mulțime și multifuncțiile de mulțime.

Menționăm faptul că, din punct de vedere matematic, elementele de noutate pe care le aducem aici sunt următoarele, axate pe două mari direcții: pe de o parte am realizat generalizarea unor concepte și proprietăți cu care se operează în cadrul teoriei măsurilor, de la cazul univoc, al funcțiilor de mulțime, la cazul multivoc, al multifuncțiilor de mulțime, și, pe de altă parte, am realizat trecerea, în anumite situații, de la cazul aditiv, la cel neaditiv. Ambele direcții generează o serie de dificultăți importante. Pe de o parte, trecerea la cazul multivoc implică, în anumite situații, folosirea relației de incluziune între mulțimi, relație care este doar parțială, și nu totală, așa cum se întâmplă în cazul univoc, în care se folosește relația de ordine. Pe de altă parte, renunțarea la condiția, foarte restrictivă de altfel, de aditivitate, necesită introducerea unor alte proprietăți, mai slabe, cum ar fi de subaditivitate, nul-aditivitate, nul-nul-aditivitate etc., cu care se operează, uneori, cu mai mare dificultate. Astfel, am prezentat diverse relații de legătură între unele tipuri de funcții și multifuncții neaditive de mulțime, punând în evidență în acest context exemple și contraexemple. De asemenea, am justificat din punct de vedere fizic necesitatea și proveniența acestor concepte și am stabilit posibile interpretări și aplicații ale acestora.

Conceptele și rezultatele teoriei matematice sunt prezentate, acolo unde este posibil, în corelație cu implicațiile fizice ale acestora, implicații care sunt explicitate in extenso în Secțiunile 1.5-1.7.

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:

**I.** ***Din punct de vedere matematic***, am introdus unele tipuri de multifuncții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, contraexemple, diverse relații de legătură, am stabilit proprietăți ale acestora, și, de asemenea, am pus în evidență corelații, implicații și interpretări din punct de vedere fizic. Amintim următoarele:

**Funcții de mulțime (cazul univoc)**

**Definiția 1.2.7**. Spunem că funcție de mulțime $m: \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ este o *măsură* dacă:

(i) $m(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n), \forall (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}$, cu $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, mulțimi două câte două disjuncte (condiție de *numărabilă aditivitate* sau $\sigma$ *−aditivitate*) și

(ii) $\exists A \in \mathcal{C}$ astfel ca $m(A) < \infty$.

O măsură trebuie să fie așadar aditivă, adică măsura unei mulțimi reprezentând reuniunea unui număr finit (sau numărabil) de mulțimi mai mici, și care sunt două câte două disjuncte, este egală cu suma măsurilor acestor submulțimi. Datorită necesității de a modela fenomene din lumea reală, în care condițiile de aditivitate (finită sau numărabilă), prezente ca proprietăți imediate ale unei măsuri, sunt mult prea restrictive, în ultimele decenii s-a dezvoltat o teorie a măsurilor neaditive (Pap [58-61]). Astfel, măsurile neaditive au fost utilizate pentru modelarea cu mai mare acuratețe a problemelor nedeterministe din mediul înconjurator. Proprietățile lor au fost aplicate în economie, teoria jocurilor, probabilități, științe ale informației, probleme de luare a deciziilor, etc.

În cele ce urmează, fie $\mathcal{C}$ un inel de părți ale unei mulțimi abstracte, nevide $T$. Vom prezenta principalele tipuri de funcții neaditive de mulțime și care generalizează noțiunea de măsură în sens clasic:

**Definiția 1.2.8**. (Precupanu [65]) O funcție de mulțime $m: \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ este *σ-subaditivă* (sau *numărabil subaditivă*) dacă

$$m(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n), \forall (A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{C}, \text{ cu } \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}.$$

Fie o funcție de mulțime arbitrară $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$, ce satisface condiția $m(\emptyset) = 0$.

**Definiția 1.2.9.** (Pap [58-61]) Funcția de mulțime $m$ se numește:

(i) *finit aditivă* dacă $m(A \cup B) = m(A) + m(B), \forall A, B \in \mathcal{C}$ cu $A \cap B = \emptyset$;

(ii)*subaditivă* dacă $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B), \forall A, B \in \mathcal{C}$ (disjuncte sau nu);

(iii) *nul-aditivă* dacă $m(A \cup B) = m(A), \forall A, B \in \mathcal{C}$, cu $m(B) = 0$;

(iv) *nul-nul-aditivă* dacă $m(A \cup B) = 0, \forall A, B \in \mathcal{C}$, cu $m(A) = m(B) = 0$;

(v) *difuză* dacă $m(\{t\}) = 0$, ori de câte ori $\{t\} \in \mathcal{C}$;

(vi) *monotonă* (sau *fuzzy* sau o *capacitate*) dacă $m(A) \leq m(B), \forall A, B \in \mathcal{C}$, cu $A \subseteq B$;

(vii) *nul-monotonă* dacă $\forall A, B \in \mathcal{C}$, cu $A \subseteq B$, ori de câte ori $m(B) = 0$, atunci în mod necesar $m(A) = 0$;

(viii) o *submăsură* (în sens Drewnowski [20]) dacă este monotonă și subaditivă;

(ix) *uniform autocontinuă* dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$\forall A, B \in \mathcal{C}$, cu $m(B) < \delta$, avem $|m(A \cup B) - m(A)| < \varepsilon$;

(x) *descrescător autocontinuă* dacă $\forall A \in \mathcal{C}$ și $\forall (B_n) \subset \mathcal{C}$ astfel ca $lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} |m(A \cup B_n) - m(A)| = 0.$$

(xi) *semi-convexă* dacă pentru orice $A \in \mathcal{C}$, cu $m(A) > 0$, există $B \in \mathcal{C}$ astfel ca $B \subseteq A$ și $m(B) = \frac{1}{2} m(A)$.

**Aplicații 1.2.11 (aplicații și interpretări fizice referitoare la aplicabilitatea măsurilor neaditive în descrierea unor procese fizice)**. Punem în evidență, în cele ce urmează, unele situații concrete care necesită folosirea măsurilor neaditive: După cum este cunoscut, măsurile monotone au o mare importanță în problemele de luare a deciziilor multicriteriale. Mai precis, dacă $T = \{1, \ldots, n\}$, atunci, pentru o funcție de mulțime $m$ definită pe $\mathcal{P}(T)$, pentru orice $S \in \mathcal{P}(T)$, $m(S)$ poate fi interpretată ca fiind gradul de importanță a combinației $S$ de criterii sau, mai bine zis, capacitatea de a lua decizia fără criteriile rămase. În plus față de ponderile obișnuite pentru criteriile luate separat, sunt definite și ponderile pentru orice combinație de criterii. Monotonia înseamnă așadar faptul că, adăugarea unui element nou unei combinații nu poate scădea importanța acesteia, ci, dimpotrivă, aduce ceva în plus.

*Posibile implicații în fizică.*

(i) Fie spațiul $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, în care $t_i$ reprezintă o particulă, pentru orice $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ și fie $m: \mathcal{P}(T) \to \mathbb{R}_+$ masa particulei, o funcție de mulțime. Raportat la lumea macroscopică, $m$ este o funcție finit aditivă de mulțime, dar acest fapt nu mai are loc la scară cuantică, din cauza prezenței fenomenelor de anihilare: dacă $t_1$ reprezintă un electron, iar $t_2$ un pozitron, atunci $m(\{t_1\}) = m(\{t_2\}) = 9{,}11 \times 10^{-31} kg$, dar $m(\{t_1, t_2\}) = m(\{t_1\} \cup \{t_2\}) = 0$;

(ii) Entropia, binecunoscutul concept în fizică, în teoria informației și în teoria mulțimilor fuzzy, descrie gradul de incertitudine și fuzziness al mulțimilor fuzzy. Entropia, în diversele variante și accepțiuni ale sale (în sens Shannon, cuantică, Fisher, von Neumann, Rényi etc.) posedă proprietăți specifice funcțiilor neaditive de mulțime: monotonie, (tare) subaditivitate (Petz [62], Holevo [41], Audenaert [6]) etc.;

(iii) În mecanica cuantică, principiul dualității undă-particulă afirmă că orice fermion (particulă de materie) și orice boson (particulă purtătoare de forță) sunt descrise de o funcție de undă, adică o funcție care variază în timp, dând particulelor densitatea de probabilitate în fiecare punct al spațiului. Aceste funcții de undă se comportă adesea ca și undele clasice, având difracție și proprietăți de interferență. Proprietatea de aditivitate a măsurilor nu mai rămâne valabilă atunci când apare fenomenul de interferență. Mai precis, interferența permite ca reuniunea a două mulțimi de măsură zero să aibă măsura diferită de zero.

**Multifuncții de mulțime (cazul multivoc)**

În cele ce urmează, se introduc următoarele noțiuni, pe baza cărora au fost obținute unele rezultate originale ale autorului. $T$ desemnează o mulțime abstractă, nevidă, $X$ un spațiu liniar real normat cu originea 0, $\mathcal{P}_0(X)$ familia submulțimilor nevide ale lui $X$, $\mathcal{P}_f(X)$ familia submulțimilor nevide, închise ale lui $X$, iar $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$ o multifuncție de mulțime satisfăcând condiția $\mu(\emptyset) = \{0\}$.

*Pseudo-metrica Hausdorff-Pompeiu* $h$:

$$h(M,N) = \max\{e(M,N), e(N,M)\}, \forall M,N \in \mathcal{P}_0(X),$$

unde $e(M,N) = \sup_{x\in M} d(x,N)$ reprezintă *excesul lui* $M$ *peste* $N$, iar $d(x,N) = \inf_{y\in N} d(x,y)$ este *distanța de la punctul* $x$ *la mulțimea* $N$ *(în raport cu metrica* $d$*)*.

**Definiția 1.4.3.** (Croitoru,...,**Gavriluț** [14]) O multifuncție de mulțime $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_f(X)$ satisfăcând condiția $\mu(\emptyset) = \{0\}$, se numește:

(i) *nul-aditivă* dacă $\mu(A \cup B) = \mu(A), \forall A,B \in \mathcal{C}$, cu $\mu(B) = \{0\}$;

(ii) *nul-nul-aditivă* dacă $\mu(A \cup B) = \{0\}, \forall A,B \in \mathcal{C}$, cu $\mu(A) = \mu(B) = \{0\}$;

(iii) *monotonă* (în raport cu operația de incluziune între mulțimi) dacă

$$\mu(A) \subseteq \mu(B), \forall A,B \in \mathcal{C}, \text{ cu } A \subseteq B;$$

*nul-monotonă* dacă $\forall A,B \in \mathcal{C}$, cu $A \subseteq B$, ori de câte ori $\mu(B) = \{0\}$, atunci în mod necesar $\mu(A) = \{0\}$;

(iv) o *multisubmăsură* dacă $\mu$ este monotonă și

$\mu(A \cup B) \subseteq \mu(A) + \mu(B), \forall A,B \in \mathcal{C}$ (disjuncte sau nu);

(v) o *multimăsură* dacă $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \forall A,B \in \mathcal{C}$, cu $A \cap B = \emptyset$;

(vi) *uniform autocontinuă* dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall A,B \in \mathcal{C}$, cu $|\mu(B)| < \delta$, avem $h(\mu(A \cup B), \mu(A)) < \varepsilon$;

(vii) *descrescător autocontinuă* dacă $\forall A \in \mathcal{C}$ și $\forall (B_n) \subset \mathcal{C}$ astfel ca $lim_{n\to\infty} |\mu(B_n)| = \{0\}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} h(\mu(A \cup B_n), \mu(A)) = \{0\}.$$

**Observația 1.4.5.** Noțiunile introduse în Definiția 1.4.3. generalizează la cazul multivoc al multifuncțiilor de mulțime, noțiunile corespunzătoare amintite în Definiția 1.2.9.

Am pus în evidență legăturile posibile între diversele tipuri de multifuncții de mulțime, am prezentat exemple și contraexemple și am stabilit proprietăți ale acestora:

**Exemplele 1.4.11**. I. Fie $T = \mathbb{N}$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ și $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \in \mathcal{C}$ prin:

$$\mu(A) = \begin{cases} \{0\}, \text{dacă } A \text{ este finită} \\ [1,\infty), \text{dacă } A \text{ este numărabilă.} \end{cases}$$

$\mu$ este uniform autocontinuă și nu este o multisubmăsură.

II. Fie $T = \{a,b\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(T)$ și $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \in \mathcal{C}$ prin:

$$\mu(A)=\begin{cases}[0,2], \text{dacă } A=\{a,b\}\\ \left[0,\frac{1}{2}\right], \text{dacă } A=\{a\} \text{ sau } A=\{b\},\\ \{0\}, \text{dacă } A=\emptyset.\end{cases}$$

$\mu$ este nul-aditivă, dar nu este o multisubmăsură.

III. Fie $T=[0,1]$, $\mathcal{C}$ $\sigma-$algebra boreliană pe $T$, $m: \mathcal{C}\to\mathbb{R}_+$ măsura Lebesgue și $\mu$: $\mathcal{C}\to\mathcal{P}_f(\overline{\mathbb{R}}_+)$, definită prin:

$$\mu(A)=\{m(A)\}, \text{ unde } m(A)=tg(\frac{\pi}{2}m(A)), \forall A\in\mathcal{C}.$$

$\mu$ nu este uniform autocontinuă.

IV. Fie $T=\{a,b\}$, $\mathcal{C}=\mathcal{P}(T)$ și $\mu: \mathcal{C}\to\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A\in\mathcal{C}$ prin:

$$\mu(A)=\begin{cases}[0,2], \text{dacă } A=\{a,b\}\\ [0,1], \text{dacă } A=\{b\}\\ \{0\}, \text{dacă } A=\{a\} \text{ sau } A=\emptyset.\end{cases}$$

$\mu$ este nul-monotonă și nul-nul-aditivă, dar nu este o multisubmăsură, nu este nul-aditivă, nu este uniform autocontinuă și nici descrescător autocontinuă.

V. Fie $T=\{a,b\}$, $\mathcal{C}=\mathcal{P}(T)$ și $\mu: \mathcal{C}\to\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A\in\mathcal{C}$, prin:

$$\mu(A)=\begin{cases}\{1,2\}, \text{dacă } A=T\\ \{0\}, \text{dacă } A\neq T\end{cases}$$

$\mu$ este nul-monotonă, dar $\mu$ nu este nul-nul-aditivă și nici nul-aditivă.

VI. Fie $T=\{a,b\}$, $\mathcal{C}=\mathcal{P}(T)$ și $\mu: \mathcal{C}\to\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A\in\mathcal{C}$, prin:

$$\mu(A)=\begin{cases}\{1,2\}, \text{dacă } A=\{a\} \text{ sau } A=\{b\}\\ \{3\}, \text{dacă } A=\emptyset\\ \{0\}, \text{dacă } A=\{a,b\}.\end{cases}$$

$\mu$ este nul-nul-aditivă, dar nu este nul-monotonă.

VII. Fie $T=[0,\infty)$, $\mathcal{C}=\mathcal{P}(T)$ și $\mu: \mathcal{C}\to\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A\in\mathcal{C}$, prin:

$$\mu(\emptyset)=\{0\}, \mu(A)=A, \text{ dacă } cardA=1,$$
$$\mu(A)=[0,\delta(A)], \text{ dacă } A \text{ este mărginită, cu } cardA\geq 2 \text{ și}$$
$$\mu(A)=[0,\infty), \text{ dacă } A \text{ este nemărginită.}$$

($\delta(A)$ reprezintă diametrul lui $A$).

$\mu$ este nul-aditivă, dar nu este descrescător autocontinuă.

**Propoziția 1.4.15**. (*Relații de legătură între diferite tipuri de multifuncții neaditive de mulțime*) Fie $\mu$: $\mathcal{C}\to\mathcal{P}_0(X)$ o multifuncție de mulțime, cu $\mu(\emptyset)=\{0\}$. Au loc următoarele afirmații:

(i) Dacă $\mu$ este monotonă, atunci este, de asemenea, nul-monotonă;

(ii) Dacă $\mu$ este o multimăsură monotonă, atunci $\mu$ este o multisubmăsură;

(iii) Dacă $\mu$ este o multisubmăsură, atunci $\mu$ este nul-aditivă;

(iv) Dacă $\mu$ este nul-aditivă, atunci $\mu$ este nul-nul-aditivă și nul-monotonă;

(v) Dacă $\mu$ este o multisubmăsură, atunci $\mu$ este uniform autocontinuă;
(vi) Dacă $\mu$ este uniform autocontinuă, atunci $\mu$ este descrescător autocontinuă și nul-nul-aditivă;
(vii) Să presupunem că $\mu$: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}_f(X)$ și că $\mu$ este descrescător autocontinuă. Atunci $\mu$ este nul-aditivă.

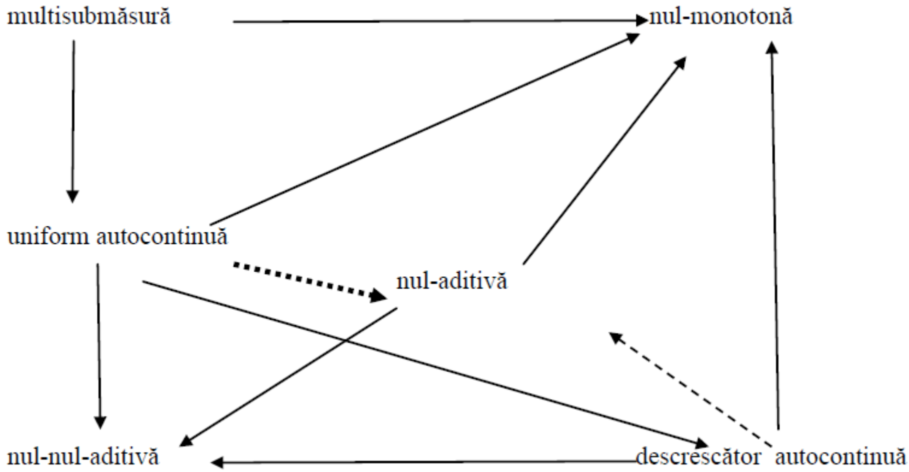


Figura 1.1. **Legături între diferite tipuri de multifuncții neaditive de mulțime**

**II.** ***Din punct de vedere al implicațiilor în fizică***, identificăm următoarele:
1. *Implicații în fizică pe baza funcțiilor neaditive de mulțime*:
1.1. Masa $m$, ca funcție finit aditivă de mulțime la scară macroscopică și pierderea acestei calități la scară microscopică;
1.2. Entropia, în diversele sale accepțiuni (în sens Shannon, în sens Fisher, în sens von Neumann, în sens Rényi etc.), ca funcție cu proprietăți specifice funcțiilor neaditive de mulțime (monotonie, subaditivitate etc.);
1.3. În Mecanica Cuantică, proprietatea de aditivitate a măsurilor se respectă atâta timp cât funcțiile de undă de Broglie asociate microparticulelor (fie ele bosoni, fie ele fermioni) nu interferă. Această proprietate dispare însă în cazul interferenței acestor funcții de undă (în prezentul context, interferența permite ca reuniunea a două mulțimi de măsură nulă să aibă măsura nenulă);
1.4. Utilizarea teoriei măsurilor neaditive în modelarea unor fenomene cuantice, precum absența interferenței cuantice și corespondența cu conceptul de mulțime macroscopică, interpretarea unui tip special de funcții neaditive de mulțime (măsura egal-nulă), în corespondență cu interferența cuantică, coerență și decoerență prin experimente de tip Young, pe baza măsurilor cuantice (numite în teză $q$-măsuri).
*2. Implicații în fizică pe baza multifuncțiilor de mulțime:*
2.1. Utilizarea multifuncțiilor de mulțime cu valori interval în procesarea sunetelor și a imaginilor:

Mai precis, în acest caz, unei imagini digitale i se poate aplica această reprezentare după cum urmează: fiecărui pixel (sau unei mulțimi de pixeli) al imaginii i se asociază un interval care măsoară eroarea de rotunjire și care este cea comisă la detectarea semnalului. Această eroare se datorează toleranțelor și limitelor în ceea ce privește precizia de calcul a instrumentelor prin care efectuăm măsurătorile. În acest sens, dacă $A = (a_{i,j})$ este matricea asociată unei imagini statice, de tip a × b, la scară de gri, putem considera spațiul $T = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$. În consecință, putem defini multifuncția de mulțime $F$ cu valori interval, definită pe $T$ și corespunzătoare matricii $A$, dată prin:

$$F(t) = [f_1(t), f_2(t)], \forall t \in T.$$

2.2. Utilizarea distanței Hausdorff-Pompeiu în numeroase aplicații bazate pe recunoașterea tiparelor (recunoaștere facială, detectarea pietonilor printr-o aplicație de supraveghere video, recunoașterea irisului, potrivirile amprentelor palmare, detectarea și identificarea ventriculilor creierului, procese de învățare etc.);

2.3. Definirea multifractalului în sens matematic, utilizând noțiunea de multifuncție de mulțime;

*3. Implicații în fizică pe baza superpoziției dintre funcțiile neaditive de mulțime și multifuncțiile de mulțime:*

3.1. Definirea unei entropii informaționale multifractale în sens Shannon, ca element de conexiune între funcții neaditive de mulțime și multifuncții. Mai precis, această entropie informațională operează simultan pe două varietăți multifractale, cea a coordonatelor poziție-impuls, și cea a rezoluțiilor de scară;

3.2. Maximizarea entropiei informaționale multifractale, prin acceptarea funcționalității unui principiu variațional multifractal, pentru care se specifică mediile și abaterile standard multifractale sau, echivalent, varianțele multifractale au ca finalitate forme pătratice multifractale;

3.3. Formele pătratice multifractale sunt invariante în raport cu grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale (grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale ale coordonatei poziție-impuls), ale căror funcții multifractale invariante pot juca rolul de hamiltoniene multifractale, considerate generatori ai mișcării;

3.4. Tot printre funcțiile multifractale invariante în raport cu grupurile Lie SL(2ℝ) multifractale, se află și densitățile de repartiție gaussiene multifractale, caz în care coeficienții formelor pătratice multifractale pot primi semnificații statistice. Acest fapt legiferează ideea că densitățile de probabilitate multifractale trebuie să fie și integrale multifractale ale mișcării;

3.5. Clasa tuturor ipotezelor statistice, la orice rezoluție de scară, marcată prin invarianța formelor pătratice multifractale, implică invarianța acestora în raport cu grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale - grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale ale coeficienților formelor pătratice multifractale. Funcțiile multifractale invariante în raport cu aceste grupuri se identifică cu varietățile de tranzitivitate ale acestor grupuri;

3.6. Clasele de ipoteze statistice specifice gaussienelor multifractale de aceeași medie sunt caracterizate de proprietatea că discriminanții formelor pătratice multifractale trebuie să fie reductibili la constante multifractale, adică la varietățile de tranzitivitate ale grupurilor Lie SL(2ℝ) multifractale ale coeficienților formelor pătratice multifractale;

3.7. Întrucât la orice scară de rezoluție, grupul SL(2ℝ) al coordonatei poziție-impuls și grupul SL(2ℝ) al coeficienților formei pătratice sunt izomorfe, atunci teoria generală a familiilor parametrice de varietăți invariante devine operațională și permite obținerea acestor familii ca soluții ale ecuațiilor lui Stoka. Aplicând această teorie în cazul unui ansamblu de oscilatori de tip Planck, se stabilește o corelație nu numai între gradul de multifractalitate și varietățile de tranzitivitate ale grupului în cadrul unei relații de incertitudine multifractală, ci și o conexiune cu un caz cuantic referitor la stările coerente, stări fundamentale în descrierea procesului de măsură.

## Capitolul 2. Tipuri de atomi. Aplicații și corelații cu unele procese fizice

La începutul acestui capitol, am trecut în revistă principalele rezultate în domeniu, inserând rezultatele originale ale autorului, atât din punct de vedere matematic, cât și din punct de vedere fizic. Pe parcursul întregii prezentări a subiectului, am evidențiat, pe cât posibil, după noțiunile și conceptele introduse sau teoremele demonstrate, interpretările fizice ale acestora, sub titulatura generală *Posibile interpretări fizice*. Mai precis, la început a fost necesară o prezentare sintetică a unor concepte esențiale din teoria atomicității. Astfel, am inserat rezultate originale ale autorului, exemple și contraexemple, interpretări din punct de vedere fizic și relații de legătură pentru diverse tipuri de atomi pentru (multi)funcții neaditive de mulțimi. Conceptele și consecințele fundamentale ale teoriei matematice au permis explicitarea in extenso la sfârșitul capitolului a implicațiilor în studiul proceselor fizice, un rol esențial avându-l legătura cu conceptul de (multi)fractalitate.

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:
***Din punct de vedere matematic***:
Cuvântul *atom,* provenind din greaca veche, înseamnă, la origine, *indivizibil*. În chimie și fizică, teoria atomică afirmă că materia este compusă din unități discrete, numite atomi. Întrucât de fapt atomii sunt la rândul lor divizibili, a fost introdus ulterior termenul de particule elementare, pentru a descrie acele părți indivizibile, deși nu indestructibile, ale unui atom. În accepțiunea sa matematică, un atom posedă proprietatea de a fi o unitate esențială, indestructibilă, indivizibilă, ireductibilă, minimală și autosimilară.

**I. Noțiunea de atom a fost introdusă în literatură mai întâi în cazul univoc.**

**2.2. Tipuri de atomi ai unei funcții de mulțime. Exemple. Aplicații în fizică**

Prezentăm succint noțiunea, însoțită de posibilele interpretări fizice pe care le-am obținut. Fie $\mathcal{C}$ un inel de părți ale unei mulțimi abstracte, nevide $T$ și $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ o funcție arbitrară de mulțime, ce satisface condiția $m(\emptyset) = 0$.

**Definiția 2.2.1**. (Mesiar *et al*. [24], Ouyang *et al*. [25], Li *et al*. [21, 22])

I. O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se numește:

(i) *atom* al lui $m$ dacă $m(A) > 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ avem fie $m(B) = 0$, fie $m(A \backslash B) = 0$;

(ii) *pseudo-atom* al lui $m$ dacă $m(A) > 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ avem fie $m(B) = 0$, fie $m(B) = m(A)$;

(iii) *atom minimal* al lui $m$ dacă $m(A) > 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ avem fie $m(B) = 0$, fie $B = A$.

II. Spunem că $m$ este:

(i) *finit pur atomică* dacă $T = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, unde mulțimile $A_i \in \mathcal{C}$, $i = \overline{1,p}$ sunt atomi disjuncți doi cât doi ai lui $m$ (spațiul $T$ se poate reprezenta ca o reuniune finită de atomi ai lui $m$).

*pur atomică* dacă spațiul $T$ se poate reprezenta ca o reuniune cel mult numărabilă de atomi ai lui $m$.

(ii) *non-atomică* dacă nu are atomi, adică, pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $m(A) > 0$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $m(B) > 0$ și $m(A \backslash B) > 0$.

(iii) *non-pseudo-atomică* dacă nu are pseudo-atomi, adică, pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $m(A) > 0$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $m(B) > 0$ și $m(B) \neq m(A)$.

**Observațiile 2.2.2**. I. Orice mulțime formată dintr-un singur element, de "măsură" strict pozitivă și care aparține lui $\mathcal{C}$ este, în egală măsură, atom, pseudo-atom și atom minimal în raport cu "măsura" respectivă.

II. (Pap [26-30]) Dacă $m$ este finit aditivă (sau, mai general, $m$ este o măsură în sens clasic), atunci noțiunile de atom și de pseudo-atom coincid. Vom prezenta în secțiunea următoare o generalizare a acestui rezultat (Propozițiile 2.3.10 și 2.3.11).

**Posibile interpretări și aplicații în fizică**.

I. (i) Un atom este, așadar, o mulțime având măsură strict pozitivă, astfel încât orice submulțime a sa fie are măsura nulă, fie mulțimea reprezentând diferența dintre mulțimea inițială (atomul) și submulțimea la care ne raportăm, are măsura nulă. O posibilă interpretare fizică a acestui fapt este că un atom poate fi considerat un corespondent al unei găuri negre sau al unei singularități.

(ii) Un pseudo-atom este așadar o mulțime având măsura strict pozitivă, astfel încât orice submulțime a sa fie are măsura nulă, fie are aceeași măsură ca mulțimea însăși (pseudo-atomul). În consecință, un pseudo-atom are proprietatea că orice submulțime a sa fie este de măsură nulă, deci în timpul procesului de măsurare poate fi neglijat, fie acoperă în totalitate mulțimea.

(iii) Măsura Dirac (masa unitate) ($\delta$-măsura) (notată $\delta_t$) concentrată într-un punct arbitrar, fixat, $t$ al unei mulțimi oarecare $T$, este o măsură în sens clasic, pur-atomică (Kadets [18]). $\delta_t$ se definește astfel: dacă $\mathcal{A}$ este o $\sigma$-algebră de părți ale lui $T$, atunci $\delta_t(A) = \begin{cases} 1, t \in A \\ 0, t \notin A \end{cases}, \forall A \in \mathcal{A}$. Constatăm imediat că $T$ este atom al lui $\delta_t$ ($\delta_t(T) = 1 > 0$ și $\forall A \in \mathcal{A}$, are loc $\delta_t(A) = 0$ sau $\delta_t(T \setminus A) = 0$, după cum $t \notin A$ sau $t \in A$). În raport cu măsura Dirac $\delta_t$, atomul $T$ (spațiul neredus la un punct) este echivalent cu mulțimea punctuală $\{t\}, t \in T$. Într-adevăr, $m(T\Delta\{t\}) = 0$ (Kadets [18]), ceea ce înseamnă că, în raport cu măsura Dirac, spațiul "colapsează" într-un singur punct.

II. Posibilă interpretare fizică a unui atom/pseudo-atom/atom minimal: când se produce colapsarea, partea neglijabilă corespunde corpusculului, în timp ce partea care acoperă întreaga mulțime (mai precis, atomul) corespunde undei. În acest fel, rezultă o dominație absolută a unuia asupra celuilalt, deci un atom poate fi considerat ca fiind "podul elementar", care include toate proprietățile "materiei" (în forma corpusculului și a undei) din care provine. Mai precis, în opinia noastră, discutăm aici despre un pod de tip Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) (Susskind [33, 34]), în care corpuscul și unda sunt conectate și pot fi interpretate ca stări aflate în entanglement maxim ale aceluiași "obiect fizic". De fapt, atomii (în toate variantele lor) ar putea fi considerați ca singularități ale metricii spațiu-materie. Vom relua și detalia aceste considerații în Secțiunea 2.4.

**Teorema 2.2.14.** (Pap [30]) *Presupunem că* $m: \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ *este o funcție de mulțime monotonă, nul-aditivă și regulată. Dacă* $A \in \mathcal{B}$ *este un atom al lui* $m$, *atunci există un unic punct* $a \in A$ *astfel ca* $m(A \setminus \{a\}) = 0$
(*și, în consecință,* $m(A) = m(\{a\})$).

**Posibile aplicații în fizică**. Din teorema anterioară, deducem următoarea posibilă interpretare fizică: În ipoteza în care o funcție de mulțime $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ este monotonă, nul-aditivă și regulată (aceasta însemnând, grosier vorbind, că putem, prin intermediul său, să aproximăm mulțimi despre care avem puține informații, cu mulțimi despre care avem mai multe informații), atunci pentru orice atom al său $A$ (în ipoteza că acesta există), există un element $a \in A$ așa încât $m(A) = m(\{a\})$ (ceea ce înseamnă că "măsura" atomului este egală cu măsura fiecărui "punct" pe care acesta îl conține, ceea ce reflectă viziunea holografică, conform căreia informația este concentrată în fiecare dintre punctele (elementele) sale, ceea ce conduce la caracterul fractal).

**II. Noțiunea de atom a fost extinsă la cazul multivoc**.

**Tipuri de atomi ai unei multifuncții de mulțime: Atomi, pseudo-atomi și atomi minimali**

Am prezentat diverse tipuri de atomi, am stabilit unele legături între aceste tipuri, am dat numeroase exemple și contraexemple în acest sens și am pus în evidență proprietățile remarcabile pe care le posedă diversele tipuri de atomi. De asemenea, am prezentat posibile semnificații, implicații, corelații și aplicații în fizică.

Noțiunile de atom, pseudo-atom și atom minimal, prezentate în cazul univoc în Secțiunea 2.2, în raport cu o funcție de mulțime $m$, pot fi generalizate la cazul multivoc, în raport cu o multifuncție de mulțime. Fie deci o multifuncție de mulțime $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$, satisfăcând condiția $\mu(\emptyset) = \{0\}$.

**Definiția 2.3.1.** O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se spune că este un *atom* al lui $\mu$ dacă $\mu(A) \supsetneq \{0\}$ și pentru orice mulțime $B \in \mathcal{C}$, cu $B \subseteq A$, are loc fie $\mu(B) = \{0\}$, fie $\mu(A \setminus B) = \{0\}$.

**Definiția 2.3.2**. $\mu$ se spune că este *non-atomică* dacă nu are atomi, adică, pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $\mu(B) \neq \{0\}$ și $\mu(A \setminus B) \neq \{0\}$.

**Observația 2.3.3**. Dacă $\mu$ este monotonă, atunci este non-atomică dacă și numai dacă pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $\mu(B) \supsetneq \{0\}$ și $\mu(A \setminus B) \supsetneq \{0\}$.

**Definiția 2.3.4.** O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se spune că este un *pseudo-atom* al lui $\mu$ dacă $\mu(A) \supsetneq 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}$, cu $B \subseteq A$ avem fie $\mu(B) = \{0\}$, fie $\mu(B) = \mu(A)$.

**Definiția 2.3.5**. $\mu$ se spune că este *non-pseudo-atomică* dacă nu are pseudo-atomi, adică, pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $\mu(B) \neq \{0\}$ și $\mu(B) \neq \mu(A)$.

**Observația 2.3.6**. Dacă $\mu$ este monotonă, atunci $\mu$ este non-pseudo-atomică dacă și numai dacă pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$ astfel ca $\mu(B) \supsetneq \{0\}$ și $\mu(B) \supsetneq \mu(A)$.

**Exemplul 2.3.8**. Considerăm mulțimea $T = \{1,2,\ldots,10\}$ și definim $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$ astfel: $\forall A \subseteq T, \mu(A) = [0, cardA]$.
Atunci $\forall i \in \{1,2,\ldots,10\}$, mulțimea $\{i\}$ este un atom al lui $\mu$.

**Exemplele 2.3.9.** În general, *nu există legături între noțiunea de atom și noțiunea de pseudo-atom*:

I. Fie $T = \{t_1, t_2\}$, unde $t_1, t_2$ sunt două elemente distincte arbitrare și fie $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită prin:

$$\forall A \subseteq T, \mu(A) = \begin{cases} [0,2], \text{dacă } A = T \\ [0,1], \text{ dacă } A = \{t_1\} \\ \{0\}, \text{ dacă } A = \{t_2\} \text{ sau } A = \emptyset. \end{cases}$$

$T$ este atom și nu este pseudo-atom pentru $\mu$.

II. Fie $T = \{a, b, c\}$ și fie $\mu: \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, prin

$$\mu(A) = \begin{cases} \{0\}, \text{ dacă } A = \emptyset \\ [0,1], \text{dacă } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Fie $A = \{a, b\}$. *$A$ nu este atom al lui $\mu$*, dar *$A$ este pseudo-atom al lui $\mu$*.

III. Fie $T = \{a, b\}$ și fie $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \in \mathcal{C}$, prin

$$\mu(A) = \begin{cases} \{0\}, \text{dacă } A = \emptyset \text{ sau } A = \{a\} \\ \{1, 8\}, \text{dacă } A = \{b\} \\ \{0, 7, 9\}, \text{dacă } A = \{a, b\}. \end{cases}$$

*$T$ nu este pseudo-atom al lui $\mu$*, dar *$T$ este atom al lui $\mu$*.

Pentru anumite tipuri speciale de multifuncții de mulțime, se pot stabili unele legături între atomi și pseudo-atomi:

**Propoziția 2.3.10**. Dacă $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$ este nul-aditivă, iar $A \in \mathcal{C}$ este un atom oarecare al lui $\mu$, atunci $A$ este și pseudo-atom al lui $\mu$.
Reciproc,
**Propoziția 2.3.11**. Fie $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$ o multimăsură, ce are forma particulară $\mu(A) = [0, m(A)], \forall A \in \mathcal{C}$, unde $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ este o funcție finit aditivă de mulțime. Dacă $A_0 \in \mathcal{C}$ este un pseudo-atom al lui $\mu$, atunci $A_0$ este și atom al său.
**Observația 2.3.12**. Dacă $\mu$ are forma particulară de mai sus, dar nu este o multimăsură, atunci pot exista pseudo-atomi ai săi care să nu fie atomi:
**Exemplul 2.3.13**. Fie $T = \{t_1, t_2\}$ o mulțime abstractă, unde $t_1, t_2$ sunt elemente distincte arbitrare și $\mu: \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită prin:

$$\forall A \subseteq T, \mu(A) = \begin{cases} [0,1], \text{dacă } A \neq \emptyset \\ \{0\}, \text{dacă } A = \emptyset. \end{cases}$$

$\mu$ este nul-aditivă, dar, nu este o multimăsură. $T = \{t_1, t_2\}$ este un pseudo-atom al lui $\mu$, dar $T = \{t_1, t_2\}$ nu este atom al lui $\mu$.
**Exemplele 2.3.14**. I. Fie $T = 2\mathbb{N}(= \{0, 2, 4, \dots\})$ și $\mu: \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$, definită pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, prin

$$\mu(A) = \begin{cases} \{0\}, \text{dacă } A = \emptyset \\ \frac{1}{2}A \cup \{0\}, \text{dacă } A \neq \emptyset \end{cases}, \text{ unde } \frac{1}{2}A = \left\{\frac{x}{2}; x \in A\right\}.$$

$\mu$ este o multisubmăsură.
1. Dacă $A \in \mathcal{C}$, cu $cardA = 1$ și $A \neq \{0\}$ sau dacă $A \in \mathcal{C}, A = \{0, 2n\}, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $A$ este atom al lui $\mu$ (și, de asemenea, pseudo-atom al lui $\mu$).
2. Dacă $A \in \mathcal{C}$, cu $cardA \geq 2$ și dacă există $a, b \in A$ astfel ca $a \neq b$ și $ab \neq 0$, atunci $A$ nu este pseudo-atom al lui $\mu$ (și nici atom al lui $\mu$).
II. Fie $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$, definită pentru orice $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, prin

$$\mu(A) = \begin{cases} \{0\}, \text{dacă } A \text{ este finită} \\ \{0\} \cup [n_A, +\infty), \text{dacă } A \text{ este infinită și } n_A = minA \end{cases}.$$

$\mu$ este monotonă și non-pseudo-atomică.
Atât noțiunea de atom, cât și cea de pseudo-atom satisfac proprietatea de auto-similaritate, adică orice parte reflectă întregul. După cum se știe, această proprietate este caracteristică fractalilor.
**Propoziția 2.3.17**. Fie $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$, cu $\mu(\emptyset) = \{0\}$.
(i) Dacă $\mu$ este nul-monotonă, $A \in \mathcal{C}$ este un atom al lui $\mu$, iar $B \in \mathcal{C}$, $B \subseteq A$ este astfel încât $\mu(B) \supsetneq \{0\}$, atunci $B$ este, de asemenea, atom al lui $\mu$ și, mai mult, $\mu(A \backslash B) = \{0\}$.
(ii) Dacă $A \in \mathcal{C}$ este un pseudo-atom al lui $\mu$, iar $B \in \mathcal{C}$ satisface și $\mu(B) \supsetneq \{0\}$, atunci $B$ este, de asemenea, pseudo-atom al lui $\mu$ și, mai mult, $\mu(B) = \mu(A)$.
(ceea ce înseamnă că mulțimile $A$ și $B$ se identifică din punct de vedere al măsurii $\mu$).
**Definiția 2.3.29**. (**Gavriluț** *et al*. [13]) O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se spune că este un *atom minimal* al lui $\mu$ dacă $\mu(A) \supsetneq \{0\}$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}$, $B \subseteq A$ avem fie $\mu(B) = \{0\}$, fie $B = A$.

**Posibilă aplicație în fizică**. Orice submulțime a unui atom minimal fie este de măsură nulă (ceea ce înseamnă că poate fi neglijată în timpul procesului de măsurare), fie se suprapune în totalitate peste mulțime (atom).

**Observația 2.3.30**. I. Terminologia nu este întâmplătoare: Astfel, dacă $A \in \mathcal{C}$ este un atom minimal al lui $\mu$, atunci pentru $\mu$ nu poate exista un alt atom minimal $\tilde{A} \in \mathcal{C}$ încât $\tilde{A} \subsetneq A$. Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că există un alt atom minimal $\tilde{A} \in \mathcal{C}$ încât $\tilde{A} \subsetneq A$. Deoarece $\tilde{A}$ este atom minimal, avem $\mu(\tilde{A}) \supsetneq \{0\}$ și, întrucât $\tilde{A} \subsetneq A$, obținem că $\tilde{A} = A$, ceea ce este fals.

II. Orice mulțime formată dintr-un singur element, fie aceasta $\{t_0\} \in \mathcal{C}$, astfel ca $\mu(\{t_0\}) \supsetneq \{0\}$, este atom minimal pentru $\mu$.

**Propoziția 2.3.31**. Orice atom minimal este atom și pseudo-atom.

**Exemplul 2.3.32**. I. Fie $T = \{a, b, c, d\}$ o mulțime oarecare și fie multifuncția de mulțime $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \subseteq T$ prin:

$$\mu(A) = \begin{cases} [0,5], \text{dacă } A = T \\ [0,2], \text{dacă } A \neq T \\ \{0\}\,, \text{dacă } A = \emptyset. \end{cases}$$

Orice mulțime formată dintr-un singur element este atom minimal pentru $\mu$.

II. Dacă $T = \{u, v, w, z\}$ și

$$\mu\text{: } \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+), \mu(A) = \begin{cases} \{5\}, \text{dacă } A = T \\ \{3\}, \text{dacă } A = \{u, v, w\}, \{u, v, z\}, \{u, w, z\} \\ \{2\}, \text{dacă } A = \{u, v\}, \{u, w\} \\ \{0\}, \qquad \text{în caz contrar} \end{cases},$$

atunci $\{u, v\}$ și $\{u, w\}$ sunt atomi minimal ai lui $\mu$.

III. Fie $T = \{u, v, w, z\}$ și

$$\mu\text{: } \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+), \mu(A) = \begin{cases} \{5\}, \text{dacă } A = T \\ \{2\}, \text{dacă } A \neq T, A \neq \emptyset \\ \{0\}, \text{dacă } A = \emptyset. \end{cases}$$

Orice mulțime formată dintr-un singur element este atom minimal al lui $\mu$.

În general, *nu există legătură între noțiunea de atom/pseudo-atom și cea de atom minimal*:

**Exemplele 2.3.33**. I. Fie $T = \{a, b\}$ o mulțime oarecare și $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$, definită pentru orice $A \subseteq T$, prin:

$$\mu(A) = \begin{cases} [0,1], \text{dacă } A = \{a\} \text{ sau } A = T \\ \{0\}, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

*T este atom al lui μ, este pseudo-atom al lui μ* dar *nu este atom minimal al lui μ*.

II. Fie $T = \{a, b, c, d\}$ o mulțime oarecare și fie multifuncția de mulțime $\mu$: $\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}_0(\mathbb{R}_+)$ definită pentru orice $A \subseteq T$ prin:

$$\mu(A) = \begin{cases} [0,5], \text{dacă } A = T \\ [0,3], \text{dacă } A = \{a, b, c\} \text{ sau } A = \{a, b, d\} \text{ sau } A = \{a, c, d\} \\ [0,2], \text{ dacă } A = \{a, b\} \text{ sau } A = \{a, c\} \\ \{0\}\,, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

$\{a, b\}$ și $\{a, c\}$ sunt atomi minimali ai lui $\mu$.
**Propoziția 2.3.35**. Dacă $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$ este nul-nul-aditivă și dacă $A, B \in \mathcal{C}$ sunt doi atomi minimali diferiți ai lui $\mu$, atunci $A \cap B = \emptyset$.
**Propoziția 2.3.36**. Dacă $A \in \mathcal{C}$ este atom minimal, iar $\mu: \mathcal{C} \to \mathcal{P}_0(X)$ este nul-nul-aditivă, atunci mulțimea $A$ nu poate fi partiționată în mulțimi din $\mathcal{C}$ (aceasta înseamnă că atomii minimali sunt nepartiționabili (nedecompozabili)). Reciproc,
**Propoziția 2.3.37**. Orice atom nepartiționabil $A \in \mathcal{C}$ este atom minimal.
**Consecința 2.3.38**. Un atom este minimal dacă și numai dacă este nepartiționabil (nedecompozabil) (în raport cu o multifuncție nul-nul-aditivă de mulțime).
**Propoziția 2.3.39**. Dacă mulțimea $T$ este finită, iar $A \in \mathcal{C}$ satisface condiția $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, atunci există $B \in \mathcal{C}, B \subseteq A$, care este atom minimal al lui $\mu$.
Mai mult, dacă $A$ este un atom al lui $\mu$ iar $\mu$ este nul-aditivă, atunci $\mu(A) = \mu(B)$, iar mulțimea $B$ este unică.
**Posibilă aplicație în fizică**. În continuare, punem în evidență faptul că, din punct de vedere al măsurătorii, atomii minimali sunt singurii care contează:
**Propoziția 2.3.40**. Dacă mulțimea $T$ este finită, $\mu$ este nul-aditivă, iar $\{A_i\}_{i\in\{1,2,\dots,p\}}$ este familia tuturor atomilor minimali diferiți conținuți într-o mulțime $A \in \mathcal{C}$ cu proprietatea că $\mu(A) \supsetneq \{0\}$, atunci $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)$, ceea ce înseamnă că mulțimea $A$ se identifică, din punct de vedere al măsurii $\mu$, cu reuniunea tuturor atomilor minimali diferiți pe care îi conține.
Sintetizăm *legăturile care pot fi puse în evidență între atomi, pseudo-atomi și atomi minimali*:
**Consecința 2.3.42.** (i) Orice atom minimal este atom și pseudo-atom;
(ii) Dacă $\mu$ este nul-aditivă, atunci orice atom al lui $\mu$ este, de asemenea, pseudo-atom;

(iii) Mai mult, dacă $\mu$ este o multimăsură de o formă particulară (vezi Propoziția 2.3.11), atunci este valabilă și reciproca afirmației (ii), deci orice pseudo-atom este atom. Prin urmare, în această situație, deci pentru o multimăsură de forma particulară din Propoziția 2.3.11, o mulțime este atom dacă și numai dacă este pseudo-atom.

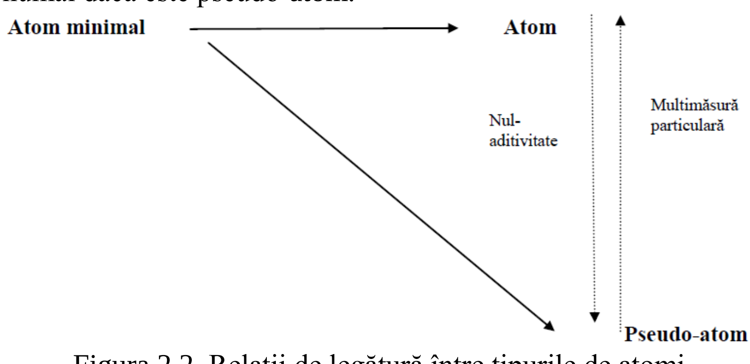


Figura 2.2. Relații de legătură între tipurile de atomi

Având în vedere cele două instanțe în care au fost definite tipurile de atomi, și anume, tipuri de atomi ai unei funcții de mulțime, respectiv, tipuri de atomi ai unei multifuncții de mulțime, următoarele **interpretări fizice** sunt posibile:

**1.** ***Interpretări fizice*** *ale tipurilor de atomi ale unei funcții de mulțime*:

**1.1.** Atomul poate fi asimilat unui pod de tip Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) (Susskind [32, 33]), în care corpusculul și unda sunt conectate și pot fi interpretate ca stări aflate în entanglement ("amestec") maxim al aceluiași "obiect fizic": când are loc colapsarea, partea neglijabilă corespunde corpusculului, în timp ce partea care acoperă întreaga mulțime (mai precis, atomul), corespunde undei. Rezultă o condiționare reciprocă undă-corpuscul, atomul fiind considerat "podul elementar" (evident, în sens Susskind) care include toate proprietățile "materiei" (atât în forma corpusculului, cât și a undei) din care provine;

**1.2.** Atomii (în toate variantele lor) ar putea fi considerați ca singularități ale oricărei metrici spațiu-materie;

**1.3.** În raport cu măsura Dirac $\delta_t$, atomul (spațiul neredus la un punct) este echivalent cu o mulțime punctuală, ceea ce înseamnă că, în raport cu măsura mai sus amintită, spațiul "colapsează" într-un singur punct;

**1.4.** Ca aplicație a unei funcții de mulțime care este monotonă, nul-aditivă și regulată, am pus în evidență faptul că "măsura" unui atom coincide cu măsura fiecărui "punct" pe care acesta îl conține, ceea ce reflectă viziunea holografică, conform căreia informația este concentrată în fiecare dintre punctele sale, ceea ce implică caracterul fractal;

**2.** ***Interpretări fizice*** *ale tipurilor de atomi ale unei multifuncții de mulțime*:

**2.1.** Atomul poate fi considerat un corespondent al unei găuri negre sau al unei singularități;

**2.2.** Un pseudo-atom are proprietatea că orice submulțime a sa fie este de măsură nulă (deci poate fi neglijat în timpul procesului de măsurare), fie acoperă în totalitate mulțimea;

**2.3.** Atomul minimal posedă proprietatea de indivizibilitate (nedecompozabilitate), situație în care orice submulțime a unui atom minimal fie este de măsură nulă (ceea ce înseamnă că poate fi neglijată în timpul procesului de măsurare), fie se suprapune peste mulțime (adică atomul minimal). Într-o astfel de conjectură, noțiunea de atom minimal poate fi pus în corespondență cu conceptul de particulă elementară;

**3.** ***Interpretări fizice*** *ale tipurilor de atomi definite atât prin intermediul unei funcții de mulțime, cât și prin intermediul unei multifuncții de mulțime*:

**3.1.** Dinamicile "obiectului fizic" undă-corpuscul pot fi descrise în Teoria Relativității de Scară atât prin scenariul de tip Schrödinger (adică prin ecuația diferențială Schrödinger multifractală), cât și prin scenariul de tip Madelung multifractal (adică prin sistemul de ecuații diferențiale ale hidrodinamicii multifractale). Cele două scenarii nu se exclud, ci, dimpotrivă, sunt complementare:

Este cunoscut faptul că dinamicile sistemelor complexe în Teoria Relativității de Scară (TRS) pot fi descrise fie prin scenariul de tip Schrödinger multifractal explicitat prin ecuația diferențială

$$\lambda^2 (dt)^{\left[\frac{4}{f(\alpha)}\right]-2} \partial_l \partial^l \Psi + i\lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \partial_t \Psi = 0, \qquad (2.1)$$

fie prin scenariul de tip Madelung multifractal explicitat prin sistemul de ecuații diferențiale

$$\partial_t v^p + v^l \partial_l v^p = -\partial^p Q, \qquad (2.2)$$

$$\partial_t \rho + \partial_l (\rho v^l) = 0, \qquad (2.3)$$

unde $-Q = \frac{u_l u^l}{2} + \lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \partial_l u^l = -\lambda^2 (dt)^{\left[\frac{4}{f(\alpha)}\right]-2} \frac{\partial_l \partial^l \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$, (2.4)

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial_t}, \partial_l = \frac{\partial}{\partial x^l}, \partial_l \partial^l = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \qquad (2.5)$$

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{is}, \rho = \Psi \overline{\Psi}, v^p = 2\lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \partial^p s, u^p = \lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \partial^p ln\rho,$$
$$i = \sqrt{-1}, l, p = 1,2,3. \qquad (2.6)$$

În relațiile de mai sus, $\Psi$ este funcția de stare, $\overline{\Psi}$ este conjugata complexă a lui $\Psi$, $v^p$ este viteza diferențială și independentă de scara de rezoluție $dt$, $u^p$ este viteza nediferențială și dependentă de scara de rezoluție, $Q$ este potențialul multifractal specific, $\sqrt{\rho}$ este amplitudinea lui $\Psi$, $s$ este faza lui $\Psi$, $x^l$ este coordonata spațială multifractală, $t$ este coordonata temporală nemultifractală cu rol de parametru afin al curbelor de mișcare (menționăm faptul că în TRS, dinamicile entităților oricărui sistem complex sunt descrise prin curbe continue și nediferențiabile – curbe multifractale), $\lambda$ este un parametru asociat tranziției de scară multifractal – nemultifractal, $f(\alpha)$ este spectrul de singularitate cu indice de singularitate de ordin $\alpha = \alpha(D_F)$ și $D_F$ este dimensiunea fractală a curbelor de mișcare;

**3.2.** În scenariul de tip Schrödinger multifractal, invarianța ecuației diferențiale Schrödinger unidimensionale în raport cu transformările omografice ale variabilei timp oferă, pe baza setului de matrici $2 \times 2$ de elemente reale variabile, o descriere a dinamicilor undă-corpuscul pe baza relațiilor dintre matricile reprezentative;

**3.3.** Întrucât orice matrice de tipul $2 \times 2$ poate fi scrisă ca o combinație liniară cu coeficienți reali, ce implică două metrici speciale și anume, matricea unitate și matricea de urmă nulă, atunci orice descriere a dinamicilor undă-corpuscul permite o descriere explicită a acestora, printr-o geometrie metrică a spațiului;

**3.4.** În particular, se propune metrica Cartan-Killing a algebrei SL(2ℝ) a acestor matrici:

Discutăm aici, în cazul dinamicilor unidimensionale, de o realizare a grupului Lie SL(2ℝ) prin acțiunea următoare (Mazilu și Agop [22]):

$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, x' = \frac{x}{\gamma t + \delta}$, (2.7) unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt elemente reale.

Dintr-o astfel de perspectivă, descrierea dinamicilor undă – corpuscul se dovedește reductibilă prin setul de matrici $2 \times 2$ $\quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (2.8)
de elemente reale variabile, la relațiile dintre matricile reprezentative.

Reamintim faptul că orice matrice de tipul (2.8) poate fi scrisă ca o combinație liniară cu coeficienți reali ce implică două matrici speciale, anume matricea unitate $\widehat{U}$ și o matrice de urmă nulă $\hat{I}$ (de la involuție), adică relația

$$\widehat{M} = \lambda\widehat{U} + \mu\hat{I}. \tag{2.9}$$

Involuția $\hat{I}$ are următoarele proprietăți:
(i) Pătratul său este multiplu de $\widehat{U}$;
(ii)Punctele fixe ale acțiunii sale omografice sunt cele ale matricii $\widehat{M}$.
În (2.9), avem libertatea de a alege o parametrizare în care pătratul lui $\hat{I}$ să fie chiar matricea unitate până la un semn. În acest caz, putem exprima elementele lui $\hat{I}$ numai prin doi parametri ce reprezintă direcțiile asimptotice ale lui $\widehat{M}$.

În cazul direcțiilor asimptotice complexe (fie ele $u \pm iv$), reprezentarea lui $\hat{I}$ prin direcțiile asimptotice este o “reprezentare sferică’’, care în condițiile satisfacerii restricțiilor (i) și (ii), ia forma:

$$\hat{I} = \frac{1}{v}\begin{pmatrix} -u & -u^2 - v^2 \\ 1 & u \end{pmatrix}, \hat{I}^2 = -\widehat{U}. \tag{2.10}$$

Acum, o astfel de reprezentare a dinamicilor undă - corpuscul permite o descriere diferențială explicită a acestora, printr-o geometrie metrică, exact ca descrierea metrică a spațiului (mai precis, o geometrie de tip hiperbolic). Într-adevăr, reprezentarea dinamicilor undă – corpuscul prin matrici $2 \times 2$ conduce la o metrică naturală a spațiului matricilor, de exemplu, metrica Cartan-Killing a algebrei SL(2ℝ) a acestor matrici.

Covectorii de bază ai unei astfel de geometrii sunt dați, în cazul cel mai general al unei matrici de tipul (2.8), prin $1-$formele diferențiale:

$$\omega^1 = \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{\Delta}, \omega^2 = \frac{\alpha d\gamma - \gamma d\alpha}{\Delta}, \omega^3 = \frac{\beta d\gamma - \gamma d\beta}{\Delta}, \Delta = \alpha\gamma - \beta^2. \tag{2.11}$$

În parametrizarea dată în (2.9) și (2.10), $1-$formele (2.11) devin

$$\omega^1 = \frac{1}{v}d\Phi + \sin^2\Phi\frac{du}{v^2} - \sin\Phi\cos\Phi\frac{dv}{v^2}$$
$$\omega^2 = 2\frac{u}{v}d\Phi + 2\sin^2\Phi\frac{udu + vdv}{v^2} + 2\sin\Phi\cos\Phi\frac{vdu - udv}{v^2}$$
$$\omega^3 = \frac{u^2+v^2}{v}d\Phi + \sin^2\Phi\frac{(u^2-v^2)du+2uvdv}{v^2} + \sin\Phi\cos\Phi\frac{2uvdu-(u^2-v^2)dv}{v^2}, \tag{2.12}$$

unde $\quad tg\Phi = \frac{\mu}{\lambda}.$ (2.13)

În raport cu acești covectori, metrica este dată de forma pătratică

$$ds^2 = \omega^1\omega^3 - (\frac{\omega^2}{2})^2 = d\Phi^2 - \sin^2\Phi\frac{du^2+dv^2}{v^2}. \tag{2.14}$$

**3.5.** Într-o astfel de perspectivă, corelarea dinamicilor undă-corpuscul este delegată unei aplicații armonice, de la spațiul undei, la cel al corpusculului. Atunci, explicit, se obține o ecuație sinus-Gordon multifractală, a cărei soluție

conduce la funcția eliptică $sn$ a lui Jacobi, prin ale cărei degenerări în perioadă rezultă dominanța fie a caraterului ondulatoriu, fie a celui corpuscular:
Într-un astfel de cadru, corelarea dinamicilor undă – corpuscul (ca moduri de manifestare a oricărui sistem complex) este delegată aplicației armonice de la spațiul asociat undei, la spațiul asociat corpusculului $:\vec{X} \rightarrow \vec{\xi}$. Considerăm așadar funcționala principiului aplicației armonice

$$I = \frac{1}{2}\iiint d^3\vec{X}\sqrt{|h|}h^{il}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial X^i}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial X^i}g\mu\nu(\vec{\xi}), \qquad (2.15)$$

unde $h^{il}$ este metrica asociată spațiului undei, iar $g^{\mu\nu}$ este metrica spațiului asociat corpusculului.
Anularea variației: $\delta I = 0$ (2.16) pentru

$$\sqrt{|h|}h^{il}(\vec{X})\frac{\partial\xi^\mu}{\partial X^i}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial X^i}g\mu\nu(\vec{\xi}) \equiv \nabla\Phi^2 - (\frac{\sin^2\Phi}{\mathrm{v}})^2[(\nabla\mathrm{u})^2 + (\nabla\mathrm{v})^2] \qquad (2.17)$$

conduce la ecuațiile de tip Euler

$$\nabla^2\Phi + \sin\Phi\cos\Phi\frac{(\nabla\mathrm{u})^2+(\nabla\mathrm{v})^2}{v^2} = 0, \nabla\left(\frac{\nabla u}{v^2}\right) = 0, \nabla\left(\frac{\nabla v}{v^2}\right) + \frac{(\nabla\mathrm{u})^2+(\nabla\mathrm{v})^2}{v^3} = 0,$$

(2.18)
unde $\nabla$ definește gradientul. Ultimele două relații din (2.18) reprezintă o aplicație armonică de la spațiul Euclidian la planul hiperbolic (sau planul Lobachewski), în reprezentarea Beltrami-Poincaré.

$$\Phi'^2 + \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{a}^2}(\sin\Phi)^2 = \mathrm{C}^2, \qquad (2.24)$$

unde $C$ este o constantă de integrare pe care o presupunem reală. Așadar, $\xi$ este integrala eliptică de spața I

$$C(\xi - \xi_0) = \pm\int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2(\sin\varphi)^2}} \qquad (2.25)$$

de modul $k^2 = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2\mathrm{a}^2}$, (2.26)
așa încât $\Phi$ este o funcție eliptică în $\xi$, de forma

$$\Phi = Asn[C(\xi - \xi_0), k], A = \mathrm{const.}, \qquad (2.27)$$

unde $sn$ este funcția eliptică a lui Jacobi, de modul $k$ (Lang [19]).
Relația (2.27) admite degenerări în $k$, fie pentru $k \rightarrow 0$, situație în care aceasta se reduce la

$$\Phi \rightarrow A\,sin[C(\xi - \xi_0), k \rightarrow 0], \qquad (2.28)$$

specificând dominanța caracterului ondulatoriu, fie pentru $k \rightarrow 1$, situație în care se reduce la

$$\Phi \rightarrow A\,th[C(\xi - \xi_0), k \rightarrow 1], \qquad (2.29)$$

specificând dominanța caracterului corpuscular.
**3.6.** Prin coerența în fază undă-corpuscul, metrica spațiului se reduce la cea a lui Poincaré, caz în care, în acord cu principiul lui Ernst de generare a metricilor axial simetrice din Relativitatea Generală, rolul de "pod" în sens Susskind între undă și corpuscul este mimat de câmpul gravitațional:
Pentru $\Phi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, relația (2.14) se dovedește reductibilă la metrica spațiului hiperbolic $ds^2 = -\frac{du^2+dv^2}{v^2}$ (2.30)
sau încă, în variabilă complexă $h = u + iv, \bar{h} = u - i$ (2.31)

la metrica $ds^2 = -\frac{dhd\bar{h}}{(h-\bar{h})^2}$. (2.32)

O astfel de metrică poate permite, în acord cu Principiul lui Ernst (Ernst [8-10]) de generare a metricilor din cadrul Teoriei Generale a Relativității, funcționalitatea unui cîmp gravitațional cu simetrie axială cu rol de "pod" între undă și corpuscul în sensul lui Susskind.

**3.7.** În scenariul de tip Madelung multifractal, dinamicile undă-corpuscul sunt descrise de sistemul de ecuații diferențiale al hidrodinamicii multifractale:

Descrierea dinamicilor undă-corpuscul printr-un scenariu de tip Madelung multifractal implică rezolvarea sistemului de ecuații al hidrodinamicii multifractale (2.2)-(2.4). Sistemul fiind puternic neliniar, el nu poate admite soluții analitice decât în cazuri cu totul particulare (simetrii adecvate, condiții inițiale și pe frontieră speciale etc.). Un astfel de caz este cel al dinamicilor unidimensionale din (2.2)-(2.4), adică

$$\partial_t V + V\partial_x V = 2\lambda^2 (dt)^{\left[\frac{4}{f(\alpha)}\right]-2} \partial_x\left(\frac{\partial_{xx}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (2.33)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho V) = 0, \quad (2.34)$$

supuse condiției inițiale

$$V(X, t=0) = V_0, \rho(X, t=0) = \rho_0 \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right] \quad (2.35)$$

și cele pe frontieră

$$V(X = V_0 t, t) = V_0, \rho(X = -\infty, t) = \rho(X = +\infty, t) = 0, \quad (2.36)$$

ceea ce conduce la soluția

$$V(X, t, \mu) = \frac{V_0 a^2 + \mu^2 t x}{a^2 + \mu^2 t^2} \quad (2.37)$$

$$\rho = (X, t, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi(a^2 + \mu^2 t^2)}} \exp\left[-\frac{(X - V_0 t)^2}{a^2 + \mu^2 t^2}\right] \quad (2.38)$$

unde $\mu = \lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \times \frac{1}{\alpha}$. (2.39)

**3.8.** Impunerea unor condiții cu totul speciale (condiții inițiale și pe frontieră) ecuațiilor hidrodinamicii multifractale pentru cazul dinamicilor unidimensionale conduce la soluții analitice pentru câmpul de viteze și densitatea de stări. Dominanța unuia dintre cele două caractere implică degenerări specifice ale soluțiilor analitice, în timp ce dualitatea undă-corpuscul, prin "sincronizarea" dinamicilor la cele două rezoluții de scară (cea diferențiabilă și cea nediferențiabilă) implică funcționalitatea unei ecuații de difuzii multifractale (amplitudinea și faza oricărui obiect fizic se condiționează reciproc):

Sistemul de ecuații al hidrodinamicii multifractale (2.2)-(2.4) se dovedește reductibil la ecuația de difuzie multifractală:

$$\partial_t \rho = \lambda (dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1} \partial_l \partial^l \rho. \quad (2.44)$$

## Capitolul 3. Fractali. Multifractali. Spre o teorie multifractală a mişcării

În Secțiunile 3.1 și 3.2., am prezentat, din punct de vedere matematic, unele noțiuni și rezultate fundamentale din teoria (multi)fractalilor, din perspectiva teoriei măsurii. Aceste noțiuni și rezultate cu caracter teoretic ne-au permis dezvoltarea considerațiilor din Secțiunea 3.3, referitoare la diverse tipuri de proceduri matematice operaționale în descrierile de dinamici, precum și a considerațiilor din Secțiunea 3.4, referitoare la unele consecințe ale nediferențiabilității pentru cazul dinamicilor pe varietăți multifractale. Considerațiile din acest capitol sunt absolut necesare pentru abordarea realizată în Capitolul 4 din perspectivă multifractală.

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:

Am prezentat mai întâi, ***din punct de vedere matematic***, noțiuni și rezultate fundamentale din teoria fractalilor și a multifractalilor (din perspectiva teoriei măsurii). Într-un astfel de context, ***din punct de vedere fizic***, am specificat tipurile de proceduri matematice operaționale în descrierile de dinamici ale sistemelor complexe, rezultând atât clase de teorii fractale ale mișcării, cât și clase de teorii multifractale ale mișcării. În contextul claselor de teorii multifractale ale mișcării, am prezentat doar câteva consecințe ale nediferențiabilității pentru cazul dinamicilor pe varietăți multifractale:

Dinamicile entităților oricărui sistem complex sunt descrise prin curbe continue și nediferențiabile (curbe fractale). Într-un asemenea context, întrucât în TRS fractalizarea curbelor de mișcare ale entităților oricărui sistem complex se realizează prin stochasticizare, se pot dezvolta următoarele tipuri de proceduri matematice de descriere a dinamicilor:

**(i)** proceduri matematice monofractale bazate pe "comportamente omogene" ale sistemelor complexe, "comportamente" caracterizate de o singură dimensiune fractală (în acord cu rezultatele anterioare putem opera, de exemplu, în analiza dinamicilor oricărui sistem complex cu dimensiunea fractală Hausdorff a unei mulțimi), la scară de rezoluție globală și care prezintă aceleași proprietăți de scalare în orice interval de timp (de exemplu, procesele de tip Brownian fracționar, cu o valoare dată a dimensiunii fractale):

O astfel de alternativă a fost dezvoltată de Nottale în [25], alternativă reductibilă atât la modelul Schrödinger, cât și la modelul de fluid cuantic în cazul dinamicilor descrise prin curbe fractale de tip Peano (Mandelbrot [23], Jackson [19], Cristescu [13]) în dimensiunea fractală $D_F = 2$, la scară de rezoluție Compton (parametrul asociat dinamicii fractal-nefractal este $\lambda = \hbar/2m_0$, unde $\hbar = h/2\pi$ este constanta redusă a lui Planck, iar $m_0$ este masa de repaus a microparticulei). O astfel de procedură permite dezvoltarea claselor de teorii fractale ale mișcării (adică de dinamici pe varietăți monofractale);

**(ii)** proceduri matematice multifractale bazate pe "comportamente neomogene" ale sistemelor complexe, "comportamente" caracterizate simultan de mai multe dimensiuni fractale la scări de rezoluție locale, și care prezintă proprietăți de scalare variate, la orice interval de timp. Atunci, în descrierea dinamicilor oricărui sistem complex, se definește un spectru de singularitate $f(\alpha)$, de indice de singularitate $\alpha$, a dinamicilor (adică cele care cuantifică singularități locale și care sunt caracterizate numai de valori locale ale indicelui de singularitate):

Se permite astfel nu numai identificarea zonelor unui obiect multifractal ce sunt caracterizate de o anumită dimensiune fractală (sau, mai exact, numărul de zone a căror dimensiune fractală se află într-un anumit interval de valori), ci și identificarea unor clase de universalitate în domeniul sistemelor dinamice, chiar atunci când atractorii au aspecte diferite. Astfel de proceduri permit dezvoltarea claselor de teorii multifractale ale mișcării (adică descrieri de dinamici pe varietăți multifractale).

Am specificat câteva consecințe ale nediferențiabilității, în descrierea dinamicilor sistemelor complexe, din perspectiva procedurii matematice multifractale a TRS-ului (totalitatea acestora, dar din perspectiva unei teorii fractale a mișcării, este prezentată în Capitolul 4). Astfel:

**(i)** Spațiul mișcărilor entităților oricărui sistem complex este asimilat unei varietăți multifractale (adică curbele continue și nediferențiabile prin care sunt descrise mișcările entităților sunt caracterizate de mai multe dimensiuni fractale, constante și arbitrare, ce operează simultan. Atunci, într-un astfel de spațiu, coordonatele sunt funcții multifractale, în timp ce timpul nu este o funcție multifractală, ci doar un parametru afin al curbelor de mișcare;

**(ii)** Orice curbă multifractală este în mod explicit dependentă de scara de rezoluție δt. Mai precis, lungimea sa tinde spre infinit atunci când δt tinde spre zero (Teorema lui Lebesgue) (Mandelbrot [23]). Mai mult, spațiul devine un multifractal în sensul lui Mandelbrot;

**(iii)** Dinamicile sistemului complex sunt legate de comportamentul unui set de funcții în timpul operației de zoom a $\delta t$. Atunci $\delta t \equiv dt$, în baza funcționalității principiului substituției;

**(iv)** Dinamicile entităților oricărui sistem complex sunt descrise prin variabile multifractale. Atunci invarianța $dt \to -dt$ este ruptă, așa încât pentru orice variabilă ce descrie dinamicile oricărui sistem complex, fie ea $Q(t, dt)$, definim derivatele "înainte" $(+)$ și "înapoi" $(-)$, prin relațiile:

$$\frac{dQ_+}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t, t + \Delta t) - Q(t, \Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{dQ_-}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t, \Delta t) - Q(t - \Delta t, \Delta t)}{\Delta t}, \tag{3.1}$$

unde semnul "$+$" corespunde proceselor fizice înainte, iar semnul "$-$" corespunde proceselor fizice înapoi;

**(v)** Diferenţiala coordonatei spațiale se definește prin relația:

$$d_\pm X^i(t, dt) = d_\pm x^i(t) + d_\pm \xi(t, dt). \tag{3.2}$$

Partea diferențiabilă $d_\pm x^i(t)$ este independentă de scara de rezoluție, în timp ce partea nediferențiabilă $d_\pm \xi(t, dt)$ depinde de scara de rezoluție;

**(vi)** Partea nediferențiabilă a coordonatei spațiale satisface ecuația nediferențiabilă

$$d_{\pm}\xi^{i}(t,dt) = \lambda_{\pm}^{i}(dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1}, \tag{3.3}$$

unde $\lambda_{\pm}^{i}$ sunt coeficienți constanți asociați tranziției de scară diferențiabil – nediferențiabil, $f(\alpha)$ este spectrul de singularitate și $\alpha$ este indicele de singularitate $\alpha = \alpha(D_F)$, unde $D_F$ este dimensiunea fractală.

**(vii)** Invarianța $dt \to -dt$ a oricărei variabile menită să descrie dinamicile oricărui sistem complex este recuperată cu ajutorul operatorului:

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{+} + d_{-}}{dt}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{d_{+} - d_{-}}{dt}\right). \tag{3.4}$$

imaginară $V_F^i$ (viteza nediferențiabilă) depinde de scara de rezoluție;

**(viii)** Întrucât multifractalizarea implică stochasticizare (Mandelbrot [23], Jackson [19], Cristescu [13]), întregul "arsenal" statistic (sub forma mediilor, variațelor, covariațelor etc.), devine operațional în descrierea dinamicilor oricărui sistem complex. În particular, pentru media lui $d_{\pm}X^{i}$ admitem funcționalitatea:

$$\langle d_{\pm}X^{i}\rangle \equiv d_{\pm}x^{i}, \tag{3.7}$$

$$\langle d_{\pm}\xi^{i}\rangle = 0. \tag{3.8}$$

Dinamicile oricărui sistem complex pot fi descrise prin derivata covariantă de scară dată de operatorul (vezi Agop și Păun [4]):

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \partial_t + \hat{V}^{i}\partial_i + \frac{1}{4}(dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1}D^{lk}\partial_l\partial_k, \tag{3.9}$$

unde:

$$D^{lk} = d^{lk} - i\bar{d}^{lk},\ d^{lk} = \lambda_{+}^{l}\lambda_{+}^{k} - \lambda_{-}^{l}\lambda_{-}^{k},\ \bar{d}^{lk} = \lambda_{+}^{l}\lambda_{+}^{k} + \lambda_{-}^{l}\lambda_{-}^{k}. \tag{3.10}$$

Pentru multifractalizări prin procese stochastice de tip Markov (Mandelbrot [23], Jackson [19], Cristescu [13]), sunt satisfăcute următoarele constrângeri:

$$\lambda_{+}^{i}\lambda_{+}^{l} = \lambda_{-}^{i}\lambda_{-}^{l} = 2\lambda\delta^{il},\ f(\alpha) \equiv D_F, \tag{3.11}$$

unde $\lambda$ este un coeficient specific asociat tranziției multifractal – nemultifractal și $\delta^{il}$ este pseudo-tensorul lui Kronecker.

Acceptând funcționalitatea principiului covarianței de scară (legile dinamicii sunt invariante la transformări de scară), adică aplicând operatorul (3.9) vitezei complexe (3.5), în absența oricărei constrângeri externe, ecuațiile de mișcare (adică ecuațiile geodezicelor pe un spațiu multifractal) iau următoarea formă:

$$\frac{\hat{d}\hat{V}^{i}}{dt} = \partial_t\hat{V}^{i} + \hat{V}^{l}\partial_l\hat{V}^{i} + \frac{1}{4}(dt)^{\left[\frac{2}{f(\alpha)}\right]-1}D^{lk}\partial_l\partial_k\hat{V}^{i} = 0. \tag{3.14}$$

Aceasta înseamnă că accelerația multifractală $\partial_t\hat{V}^{i}$, convecția multifractală $\hat{V}^{l}\partial_l\hat{V}^{i}$ și disiparea multifractală $D^{lk}\partial_l\partial_k\hat{V}^{i}$ își găsesc echilibrul în orice punct al curbei multifractale de mișcare.

În cazul particular (3.11), ecuațiile de mișcare (3.14) devin:

$$\frac{\hat{d}\hat{V}^{i}}{dt} = \partial_t\hat{V}^{i} + \hat{V}^{l}\partial_l\hat{V}^{i} - i\lambda(dt)^{\left[\frac{2}{D_F}\right]-1}\partial_l\partial^{l}\hat{V}^{i} = 0. \tag{3.15}$$

# Capitolul 4. Spre o teorie fractală a mișcării. Fundamente și aplicații

Acest capitol este organizat astfel:
După o primă parte introductivă, în Secțiunea 4.2. am expus diferite rezultate în ceea ce privește o teorie fractală a mișcării și am prezentat principalele consecințe ale nediferențiabilității. Ne-am referit la noțiuni precum cea de derivată covariantă de scară, geodezice fractale în reprezentarea de tip Schrödinger, respectiv în reprezentarea de tip hidrodinamic. Secțiunea 4.3. conține rezultate referitoare la modelul lui Barbilian de geometrie diferențială fractală. De asemenea, am expus rezultate referitoare la probabilitățile generate prin intermediul mapărilor armonice. Din această perspectivă, am extins noțiuni din teoria atomicității la teorii implicând atomicitate fractală și am prezentat unele proprietăți ale atomului minimal fractal.

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:
**1.** ***Din punct de vedere fizic***:
**1.1.** În cazul fractalizării prin stochasticizări ale dinamicilor utilizând procese de tip Markov, ecuația lui Schrödinger standard se identifică cu geodezicele unui spațiu fractal pentru mișcări ale entităților unui sistem fizic pe curbele de tip Peano, la scară de rezoluție Compton:
Ecuația Schrödinger de tip fractal (fără constrângeri):

$$\lambda^2 (dt)^{\left(\frac{4}{D_F}\right)-2} \partial_p \partial^p \Psi + i\lambda (dt)^{\left(\frac{2}{D_F}\right)-1} \partial_t \Psi = 0. \quad (4.24)$$

Ecuația Schrödinger standard:

$$\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_p \partial^p \Psi + i\hbar \partial_t \Psi = 0 \quad (4.25)$$

**1.2.** Pentru cazul staționar unidimensional al geodezicelor fractale de tip Schrödinger, o simetrie specială indusă de grupul omografic sub forma grupului lui Barbilian implică "sincronizarea" entităților unui sistem fizic dat:
Ecuația fractală de tip Schrödinger ia forma următoare, în cazul unidimensional:

$$\lambda^2 (dt)^{\left(\frac{4}{D_F}\right)-2} \partial_{xx} \Psi(x,t) + i\lambda (dt)^{\left(\frac{2}{D_F}\right)-1} \partial_t \Psi = 0. \quad (4.44)$$

Cu ajutorul soluției:

$$\Psi(x,t) = \theta(x) \exp\left[-\frac{i}{2m_0 \lambda (dt)^{\left(\frac{2}{D_F}\right)-1}} Et\right], \quad (4.45)$$

unde $E$ este energia unei entități a sistemului fizic, ecuația (4.44) devine:

$$\partial_{xx}\theta(x) + k_0^2 \theta(x) = 0, (4.46)$$

$$k_0^2 = \frac{E}{2m_0 \lambda (dt)^{(4/D_F)-2}}, \quad (4.47)$$

adică, o ecuație fractală de tip Schrödinger staționară.
Grupul de transformări pentru condițiile inițiale (grupul Barbilian):

$$h \leftrightarrow \frac{ah+b}{ch+d}, \bar{h} \leftrightarrow \frac{a\bar{h}+b}{c\bar{h}+d}, k \leftrightarrow \frac{c\bar{h}+d}{ch+d} k. \quad (4.53)$$

**1.3.** Proprietățile integrale și diferențiale ale grupului de sincronizare, sub restricția existenței unui paralelism de direcții în sensul Levi-Civita, impun corespondențe cu "dinamica" planului hiperbolic. Într-o astfel de conjectură, mapări armonice între spațiul euclidian și cel hiperbolic, pe baza unui principiu variațional, permit tranziții de tip staționar-nestaționar în dinamicile sistemelor fizice, explicitate prin autostructurări de tip celular în canal și, respectiv, generări *a priori* de probabilități în sensul lui Jaynes:
Metrica (4.59) se reduce la metrica planului Lobachewski în reprezentarea Poincaré: $\frac{ds^2}{g^2} = 4\frac{dhd\bar{h}}{(h-\bar{h})^2}$, (4.67)
pentru condiția $\omega_0 = 0$, sau, în termeni reali (4.63)

$$d\phi = -\frac{du}{v}. \qquad (4.68)$$

Cu această restricție, metrica (4.66) în variabilele (4.63) se poate reduce la o metrică Lobachewski în reprezentare Beltrami:

$$\frac{ds^2}{g^2} = -\frac{du^2+dv^2}{v^2}. \qquad (4.69)$$

Relația (4.68) definește un paralelism de direcții în sens Levi-Civita.
Într-adevăr, deoarece unghiul de paralelism în planul Lobachewski este dat de relația:

$$d\phi = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial v}[\ln F(v,u)]du - \frac{\partial}{\partial u}[\ln F(v,u)]dv\} = -\frac{du}{v}, \quad (4.70)$$

unde $F(u,v) = (1/v^2)$ este factorul conformal al metricii (4.69), obținem evident (4.68).
**Teorema 4.5.1.** *Grupul Barbilian este măsurabil.*
**Demonstrație**. Grupul lui Barbilian este simplu tranzitiv și, întrucât vectorul său de structură (a se vedea metoda din Flanders [13]):

$$C_\alpha = C_{\nu\alpha}^{\nu} \qquad (4.73)$$

este identic nul, așa cum se poate observa din (4.56), aceasta înseamnă că el posedă o funcție invariantă, dată prin relația:

$$F(h,\bar{h},k) = -\frac{1}{(h-\bar{h})^2 k}, \quad (4.74)$$

care este inversul modulului determinantului unui sistem liniar (Agop și Păun [5], Mazilu și Agop [19], Mercheș și Agop [20]).
**Observația 4.5.2.** În spațiul variabilelor $(h,\bar{h},k)$, pot fi construite, *a priori*, teorii probabilistice, bazate pe probabilitatea elementară

$$dP(h,\bar{h},k) = -\frac{dh \wedge d\bar{h} \wedge dk}{(h-\bar{h})^2 k}, \qquad (4.75)$$

unde prin $\wedge$ notăm produsul exterior al 1-formelor.
**Observația 4.5.3.** Să constatăm că am obținut o perspectivă atractivă asupra teoriei prezentate (chiar dacă realizarea nu este una compactă), mai ales în cazul construcțiilor stochastice (Agop și Păun [5], Mazilu și Agop [19], Mercheș și Agop [20], Jaynes [17]). În aceste construcții, variabilele complexe $h, \bar{h}. k$ sunt pur și simplu legate de probabilitatea fundamentală care caracterizează "contingențele" care, din punct de vedere al mecanicii cuantice, pot sta la baza structurilor spațiale și spațio-temporale (Mercheș și

Agop [20]).
În consecință, ecuațiile câmpului pot fi obținute prin intermediul principiului variațional (Agop, ...,**Gavriluț**,...[4]) $\delta \int L\gamma^{\frac{1}{2}}d^3x = 0$ (4.78)
relativ la funcția lui Lagrange:

$$L = \gamma^{\alpha\beta} h_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\beta}}{(h-\bar{h})^2} = \frac{\nabla h \nabla \bar{h}}{(h-\bar{h})^2}. \qquad (4.79)$$

Ca urmare, ecuațiile diferențiale ale câmpului (ecuațiile de câmp ale lui Barbilian), corespunzătoare principiului variațional (4.78), iau forma:

$$(h-\bar{h}) \cdot (\nabla^2 h) = 2\nabla h \nabla h, (h-\bar{h}) \cdot (\nabla^2 \bar{h}) = 2\nabla \bar{h} \nabla \bar{h} \qquad (4.80)$$

și au soluția: $h = -i\frac{\cosh\tau - e^{-i\alpha}\sinh\tau}{\cosh\tau + e^{-i\alpha}\sinh\tau}$, (4.81) cu $\Delta\tau = 0$ (4.82) $\alpha$ număr real.

**Observația 4.5.6**. Pentru o alegere de forma $\alpha = 2\Omega t$, caz în care a fost introdusă o dependență temporală în dinamicile sistemului fizic, (4.81) devine: $h = \frac{i[e^{2\Phi}\sin(2\Omega t) - \sin(2\Omega t) - 2ie^{\Phi}]}{e^{2\Phi}[\cos(2\Omega t)+1] - \cos(2\Omega t) + 1}$. (4.83)

În Figurile 4.1. - 4.3. următoare, sunt prezentate diverse comportamente neliniare ale dinamicilor complexe la diferite scări de rezoluție, în coordonate adimensionale:
(i) Comportamente neliniare, la scară de rezoluție globală (Figurile 4.1. a, b);
(ii) Comportamente neliniare, la scară de rezoluție diferențiabilă (Figurile 4.2. a, b);
(iii) Comportamente neliniare, la scară de rezoluție nediferențiabilă (Figurile 4.3. a, b).

Remarcăm că, indiferent de scara de rezoluție, dinamicile oricărui sistem fizic se dovedesc reductibile, prin auto-structurare, la diverse tipare, fie ele de tip celular prin formarea de perechi (vezi Figurile 4.1. a, b - 4.3. a, b), fie ele de tip canal (vezi Figurile 4.4. a -4.4. c). Aceste tipare sunt "măsuri" ale gradului de interacție dintre entitățile oricărui sistem fizic, tăria interacției fiind în corespondență cu gradul de fractalitate (explicitat la noi prin valorile lui Ω).

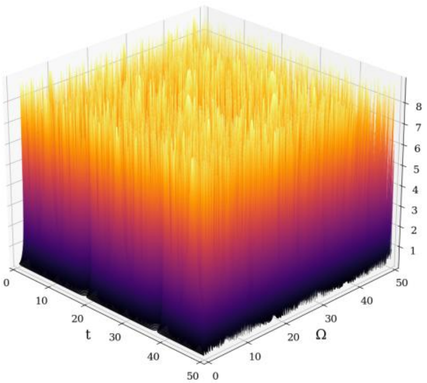


Figura 4.1. a: Dinamici 3D ale lui $h(\Omega, t)$, cu $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție globală.

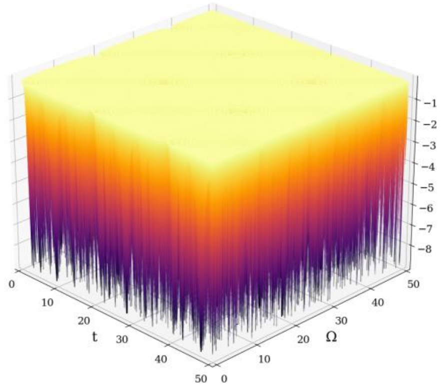


Figura 4.2. a: Dinamici 3D ale lui $Re[h(\Omega, t)]$, cu $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție diferențiabilă

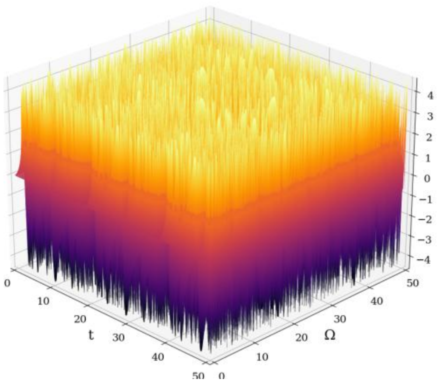


Figura 4.3. a: Dinamici 3D ale lui $Im[h(\Omega, t)]$, cu $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție nediferențiabilă

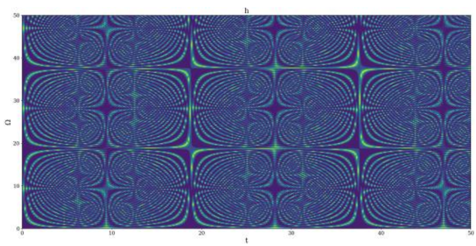


Figura 4.1. b: Dinamici 2D ale lui $h(\Omega = 0 - 50; t = 0 - 50), h = 2$ și $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție globală

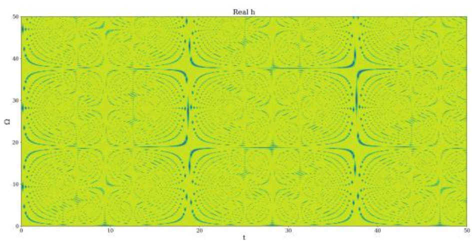


Figura 4.2. b: Dinamici 2D ale lui $Re[h(\Omega = 0 - 50; t = 0 - 50); h = 2]$ și $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție diferențiabilă

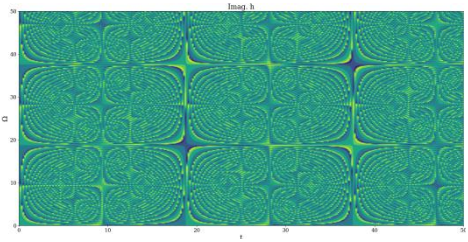


Figura 4.3. b: Dinamici 2D ale lui $Im[h(\Omega = 0 - 50; t = 0 - 50)]; h = 2$ și $\Phi = 2.35$, la scară de rezoluție nediferențiabilă

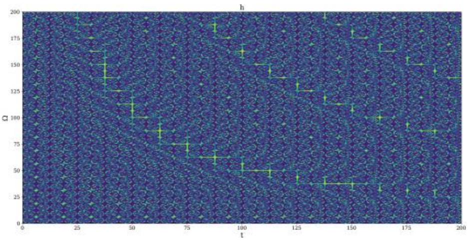


Figura 4.4 a: Dinamici 2D la scară de rezoluție globală, ale lui $h(\Omega = 0 - 200; t = 0 - 200); h = 5$.

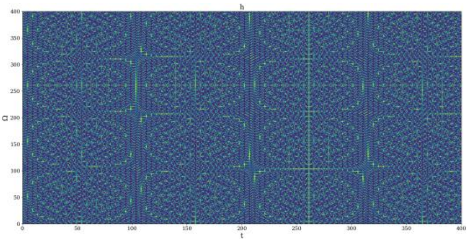


Figura 4.4 b: Dinamici 2D la scară de rezoluție globală, ale lui $h(\Omega = 0 - 400; t = 0 - 400); h = 5$.

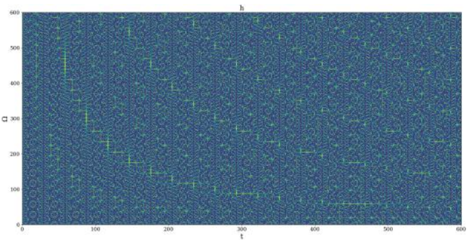


Figura 4.4 c: Dinamici 2D la scară de rezoluție globală, ale lui $h(\Omega = 0 - 600; t = 0 - 600); h = 5$.

Să observăm, de asemenea, că, în planul $(\Omega; t)$, are loc o descreștere exponențială (vezi Figurile 4.4. a și 4.4. c). Dacă explicităm o astfel de situație pentru o plasmă de ablație, aceasta poate corespunde proceselor de disipare care au loc în timpul expansiunii plasmei produse cu laser. Când plasma se extinde, plasmele produse cu laser pierd particulele de energie prin procese de coliziune/radiație.

O explicitare a unei astfel de situații specifică faptul că varianta hidrodinamică a unei mecanici fractale este abordată mai ușor. Mai mult, teoria măsurii cuantice poate deveni un caz particular al unei posibile teorii a măsurii fractale la o scară de rezoluție dată.

**2. *Din punct de vedere matematic*:**

**2.1.** Conceptul de atomicitate minimală a fost discutat în corespondență cu teoria cuantică a măsurii. Acest concept a fost extins în forma noțiunii de atomicitate fractală. Câteva proprietăți ale acestei noțiuni au fost expuse din

punct de vedere matematic.
**2.2.** Într-o astfel de abordare, a fost utilizată o metodă inversă în ceea ce privește dezvoltările comune privind conceptul de atomicitate minimală, observând că mecanica cuantică se identifică cu un caz particular al mecanicii fractale la o scară de rezoluție dată.
Rezultatele precedente specifică următoarele:
(i) Mecanica cuantică este un caz particular al mecanicii fractale (teorii ale mișcărilor ce au loc pe curbe Peano la scară de rezoluție Compton);
(ii) Probabilitățile în sens Jaynes sunt generate cu ajutorul aplicațiilor armonice între spațiul euclidian și spațiul hiperbolic.

Aceste două argumente sunt, în opinia noastră, suficiente, deoarece ele ne permit să obținem o generalizare a teoriei măsurii cuantice. Este vorba despre o posibilă teorie a măsurilor fractale și, implicit, despre introducerea unor concepte ce pot fi dezvoltate în cadrul acestei teorii. Unul dintre aceste concepte este cel de atom minimal fractal, ce reprezintă o generalizare naturală a conceptului de atom minimal, pe care l-am descris în Capitolul 2.

În cele ce urmează, introducem noțiunea și prezentăm unele proprietăți de bază ale atomului minimal fractal. Fie $T$ o mulțime oarecare, nevidă, $\mathcal{C}$ o latice de submulțimi ale lui $\mathcal{P}(T)$ și $m: \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ o funcție de mulțime, satisfăcând condiția $m(\emptyset) = 0$. Definițiile date în Capitolul 2 pentru noțiunile de pseudo-atom și respectiv, de atom minimal, pot fi generalizate, fără nicio modificare, la cazul în care $\mathcal{C}$ nu este inel, ci doar latice.

**Definiția 4.6.1.** O mulțime $A \in \mathcal{C}$ se numește:
(i) *pseudo-atom* al lui $m$ dacă $m(A) > 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}$, $B \subseteq A$, are loc fie $m(B) = 0$, fie $m(B) = m(A)$.
(ii)*atom minimal* al lui $m$ dacă $m(A) > 0$ și pentru orice $B \in \mathcal{C}$, $B \subseteq A$, are loc fie $m(B) = 0$, fie $B = A$.

**Propoziția 4.6.2.** (Iannaccone și Khokha [15]) Dacă mulțimile $A$ și $B$ au dimensiunile fractale $D_A$, respectiv, $D_B$, atunci mulțimea $A \cup B$ are dimensiunea fractală
$$D_{A\cup B} = max\{D_A, D_B\}.$$
**Propoziția 4.6.3.** (Iannaccone și Khokha [15]) Dacă mulțimile $A$ și $B$ au dimensiunile fractale $D_A$, respectiv, $D_B$, atunci mulțimea $A \cap B$ are dimensiunea fractală $D_{A\cap B} = D_A + D_B - d$
($d$ este dimensiunea euclidiană a spațiului de scufundare).
Întrucât $\mathcal{C}$ este o latice, deci este închisă în raport cu intersecția și reuniunea a două mulțimi, rezultă că noțiunea următoare este bine definită:
**Definiția 4.6.4.** Un pseudo-atom (respectiv, atom minimal) $A \in \mathcal{C}$ al lui $m$, având dimensiunea fractală $D_A$, se numește *pseudo-atom fractal* (respectiv, *atom minimal fractal*).
Obținem atunci:
**Propoziția 4.6.5.** Dacă $A, B \in \mathcal{C}$ sunt pseudo-atomi fractali ai lui $m$ și dacă $m(A \cap B) > 0$, atunci $A \cap B$ este, de asemenea, un pseudo-atom fractal al lui $m$ și $m(A \cap B) = m(A) = m(B)$.

## Concluzii generale

**În Capitolul 1:**

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:

I. *Din punct de vedere matematic*, am introdus unele tipuri de multifuncții neaditive de mulțime, pentru care am prezentat exemple, contraexemple, diverse relații de legătură, am stabilit proprietăți ale acestora, și, de asemenea, am pus în evidență corelații, implicații și interpretări din punct de vedere fizic.

II. Astfel, *din punct de vedere al implicațiilor în fizică*, identificăm următoarele:

1. *Implicații în fizică pe baza funcțiilor neaditive de mulțime*:

1.1. Masa $m$, ca funcție finit aditivă de mulțime la scară macroscopică și pierderea acestei calități la scară microscopică;

1.2. Entropia, în diversele sale accepțiuni (în sens Shannon, în sens Fisher, în sens von Neumann, în sens Rényi etc.), ca funcție cu proprietăți specifice funcțiilor neaditive de mulțime (monotonie, subaditivitate etc.);

1.3. În Mecanica Cuantică, proprietatea de aditivitate a măsurilor se respectă atâta timp cât funcțiile de undă de Broglie asociate microparticulelor (fie ele bosoni, fie ele fermioni) nu interferă. Această proprietate dispare însă în cazul interferenței acestor funcții de undă (în prezentul context, interferența permite ca reuniunea a două mulțimi de măsură nulă să aibă măsura nenulă);

1.4. Utilizarea teoriei măsurilor neaditive în modelarea unor fenomene cuantice, precum absența interferenței cuantice și corespondența cu conceptul de mulțime macroscopică, interpretarea unui tip special de funcții neaditive de mulțime (măsura egal-nulă), în corespondență cu interferența cuantică, coerență și decoerență prin experimente de tip Young, pe baza măsurilor cuantice (numite în teză $q$-măsuri).

2. *Implicații în fizică pe baza multifuncțiilor de mulțime:*

2.1. Utilizarea multifuncțiilor de mulțime cu valori interval în procesarea sunetelor și a imaginilor;

2.2. Utilizarea distanței Hausdorff-Pompeiu în numeroase aplicații bazate pe recunoașterea tiparelor (recunoaștere facială, detectarea pietonilor printr-o aplicație de supraveghere video, recunoașterea irisului, potrivirile amprentelor palmare, detectarea și identificarea ventriculilor creierului, procese de învățare etc.);

2.3. Definirea multifractalului în sens matematic, utilizând noțiunea de multifuncție de mulțime;

3. *Implicații în fizică pe baza superpoziției dintre funcțiile neaditive de mulțime și multifuncțiile de mulțime:*

1.1. Definirea unei entropii informaționale multifractale în sens Shannon, ca element de conexiune între funcții neaditive de mulțime și multifuncții. Mai precis, această entropie informațională operează simultan pe două varietăți multifractale, cea a coordonatelor poziție-impuls, și cea a rezoluțiilor de scară;

1.2. Maximizarea entropiei informaționale multifractale, prin acceptarea funcționalității unui principiu variațional multifractal, pentru care se specifică mediile și abaterile standard multifractale sau, echivalent, variantele multifractale au ca finalitate forme pătratice multifractale;

1.3. Formele pătratice multifractale sunt invariante în raport cu grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale (grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale ale coordonatei poziție-impuls), ale căror funcții multifractale invariante pot juca rolul de hamiltoniene multifractale, considerate generatori ai mișcării;

1.4. Tot printre funcțiile multifractale invariante în raport cu grupurile Lie SL(2ℝ) multifractale, se află și densitățile de repartiție gaussiene multifractale, caz în care coeficienții formelor pătratice multifractale pot primi semnificații statistice. Acest fapt legiferează ideea că densitățile de probabilitate multifractale trebuie să fie și integrale multifractale ale mișcării;

1.5. Clasa tuturor ipotezelor statistice, la orice rezoluție de scară, marcată prin invarianța formelor pătratice multifractale, implică invarianța acestora în raport cu grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale - grupuri Lie SL(2ℝ) multifractale ale coeficienților formelor pătratice multifractale. Funcțiile multifractale invariante în raport cu aceste grupuri se identifică cu varietățile de tranzitivitate ale acestor grupuri;

1.6. Clasele de ipoteze statistice specifice gaussienelor multifractale de aceeași medie sunt caracterizate de proprietatea că discriminanții formelor pătratice multifractale trebuie să fie reductibili la constante multifractale, adică la varietățile de tranzitivitate ale grupurilor Lie SL(2ℝ) multifractale ale coeficienților formelor pătratice multifractale;

1.7. Întrucât la orice scară de rezoluție, grupul SL(2ℝ) al coordonatei poziție-impuls și grupul SL(2ℝ) al coeficienților formei pătratice sunt izomorfe, atunci teoria generală a familiilor parametrice de varietăți invariante devine operațională și permite obținerea acestor familii ca soluții ale ecuațiilor lui Stoka. Aplicând această teorie în cazul unui ansamblu de oscilatori de tip Planck, se stabilește o corelație nu numai între gradul de multifractalitate și varietățile de tranzitivitate ale grupului în cadrul unei relații de incertitudine multifractală, ci și o conexiune cu un caz cuantic referitor la stările coerente, stări fundamentale în descrierea procesului de măsură.

**În Capitolul 2:**

*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:

Având în vedere cele două instanțe în care au fost definite tipurile de atomi, și anume, tipuri de atomi ai unei funcțiide mulțime, respectiv, tipuri de atomi ai unei multifuncții de mulțime, următoarele interpretări fizice sunt posibile:

1. *Interpretări fizice ale tipurilor de atomi ale unei funcții de mulțime*:

1.1. Atomul poate fi asimilat unui pod de tip Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), în care corpusculul și unda sunt conectate și pot fi interpretate ca stări aflate în entanglement ("amestec") maxim al aceluiași "obiect fizic": când are loc colapsarea, partea neglijabilă corespunde corpusculului, în timp ce partea care acoperă întreaga mulțime (mai precis, atomul), corespunde undei. Rezultă o condiționare reciprocă undă-corpuscul, atomul fiind considerat "podul elementar” (evident, în sens Susskind) care include toate proprietățile “materiei” (atât în forma corpusculului, cât și a undei) din care provine;

1.2. Atomii (în toate variantele lor) ar putea fi considerați ca singularități ale oricărei metrici spațiu-materie;

1.3. În raport cu măsura Dirac $\delta_t$, atomul (spațiul neredus la un punct) este echivalent cu o mulțime punctuală, ceea ce înseamnă că, în raport cu măsura mai sus amintită, spațiul “colapsează” într-un singur punct;

1.4. Ca aplicație a unei funcții de mulțime care este monotonă, nul-aditivă și regulată, am pus în evidență faptul că “măsura” unui atom coincide cu măsura fiecărui “punct” pe care acesta îl conține, ceea ce reflectă viziunea holografică, conform căreia informația este concentrată în fiecare dintre punctele sale, ceea ce implică caracterul fractal;

2. *Interpretări fizice ale tipurilor de atomi ale unei multifuncții de mulțime*:

2.1. Atomul poate fi considerat un corespondent al unei găuri negre sau al unei singularități;

2.2. Un pseudo-atom are proprietatea că orice submulțime a sa fie este de măsură nulă (deci poate fi neglijat în timpul procesului de măsurare), fie acoperă în totalitate mulțimea;

2.3. Atomul minimal posedă proprietatea de indivizibilitate (nedecompozabilitate), situație în care orice submulțime a unui atom minimal fie este de măsură nulă (ceea ce înseamnă că poate fi neglijată în timpul procesului de măsurare), fie se suprapune peste mulțime (adică atomul minimal). Într-o astfel de conjectură, noțiunea de atom minimal poate fi pus în corespondență cu conceptul de particulă elementară;

3. *Interpretări fizice ale tipurilor de atomi definite atât prin intermediul unei funcții de mulțime, cât și prin intermediul unei multifuncții de mulțime*:

3.1. Dinamicile “obiectului fizic” undă-corpuscul pot fi descrise în Teoria Relativității de Scară atât prin scenariul de tip Schrödinger (adică prin ecuația diferențială Schrödinger multifractală), cât și prin scenariul de tip Madelung multifractal (adică prin sistemul de ecuații diferențiale ale hidrodinamicii multifractale). Cele două scenarii nu se exclud, ci, dimpotrivă, sunt complementare;

3.2. În scenariul de tip Schrödinger multifractal, invarianța ecuației diferențiale Schrödinger unidimensionale în raport cu transformările omografice ale variabilei timp oferă, pe baza setului de matrici $2 \times 2$ de elemente reale variabile, o descriere a dinamicilor undă-corpuscul pe baza relațiilor dintre matricile reprezentative;

3.3. Întrucât orice matrice de tipul $2 \times 2$ poate fi scrisă ca o combinație liniară cu coeficienți reali, ce implică două metrici speciale și anume, matricea unitate și matricea de urmă nulă, atunci orice descriere a dinamicilor undă-corpuscul permite o descriere explicită a acestora, printr-o geometrie metrică a spațiului;

3.4. În particular, se propune metrica Cartan-Killing a algebrei SL($2\mathbb{R}$) a acestor matrici;

3.5. Într-o astfel de perspectivă, corelarea dinamicilor undă-corpuscul este delegată unei aplicații armonice, de la spațiul undei, la cel al corpusculului. Atunci, explicit, se obține o ecuație sinus-Gordon multifractală, a cărei soluție conduce la funcția eliptică $sn$ a lui Jacobi, prin ale cărei degenerări în perioadă rezultă dominanța fie a caraterului ondulatoriu, fie a celui corpuscular;
3.6. Prin coerența în fază undă-corpuscul, metrica spațiului se reduce la cea a lui Poincaré, caz în care, în acord cu principiul lui Ernst de generare a metricilor axial simetrice din Relativitatea Generală, rolul de “pod” în sens Susskind între undă și corpuscul este mimat de câmpul gravitațional;
3.7. În scenariul de tip Madelung multifractal, dinamicile undă-corpuscul sunt descrise de sistemul de ecuații diferențiale al hidrodinamicii multifractale;
3.8. Impunerea unor condiții cu totul speciale (condiții inițiale și pe frontieră) ecuațiilor hidrodinamicii multifractale pentru cazul dinamicilor unidimensionale conduce la soluții analitice pentru câmpul de viteze și densitatea de stări. Dominanța unuia dintre cele două caractere implică degenerări specifice ale soluțiilor analitice, în timp ce dualitatea undă-corpuscul, prin “sincronizarea” dinamicilor la cele două rezoluții de scară (cea diferențiabilă și cea nediferențiabilă) implică funcționalitatea unei ecuații de difuzii multifractale (amplitudinea și faza oricărui obiect fizic se condiționează reciproc).

**În Capitolul 3:**
*Rezultatele originale* prezentate în prezentul capitol sunt următoarele:

Am prezentat mai întâi, *din punct de vedere matematic*, noțiuni și rezultate fundamentale din teoria fractalilor și a multifractalilor (din perspectiva teoriei măsurii). Într-un astfel de context, *din punct de vedere fizic*, am specificat tipurile de proceduri matematice operaționale în descrierile de dinamici ale sistemelor complexe, rezultând atât clase de teorii fractale ale mișcării, cât și clase de teorii multifractale ale mișcării. În contextul claselor de teorii multifractale ale mișcării, am prezentat doar câteva consecințe ale nediferențiabilității pentru cazul dinamicilor pe varietăți multifractale.

**În Capitolul 4:**
*Rezultatele originale* prezentate în acest capitol sunt următoarele:
1. *Din punct de vedere matematic,*
1.1. Conceptul de atomicitate minimală a fost discutat în corespondență cu teoria cuantică a măsurii. Acest concept a fost extins în forma noțiunii de atomicitate fractală. Câteva proprietăți ale acestei noțiuni au fost expuse din punct de vedere matematic.
1.2. Într-o astfel de abordare, a fost utilizată o metodă inversă în ceea ce privește dezvoltările comune privind conceptul de atomicitate minimală, observând că mecanica cuantică se identifică cu un caz particular al mecanicii fractale la o scară de rezoluție dată.
2. *Din punct de vedere fizic,*
2.1. În cazul fractalizării prin stochasticizări ale dinamicilor utilizând procese

de tip Markov, ecuația lui Schrödinger standard se identifică cu geodezicele unui spațiu fractal pentru mișcări ale entităților unui sistem fizic pe curbele de tip Peano, la scară de rezoluție Compton.

2.2. Pentru cazul staționar unidimensional al geodezicelor fractale de tip Schrödinger, o simetrie specială indusă de grupul omografic sub forma grupului lui Barbilian implică "sincronizarea" entităților unui sistem fizic dat.

2.3. Proprietățile integrale și diferențiale ale grupului de sincronizare, sub restricția existenței unui paralelism de direcții în sensul Levi-Civita, impun corespondențe cu "dinamica" planului hiperbolic. Într-o astfel de conjectură, mapări armonice între spațiul euclidian și cel hiperbolic, pe baza unui principiu variațional, permit tranziții de tip staționar-nestaționar în dinamicile sistemelor fizice, explicitate prin autostructurări de tip celular în canal și, respectiv, generări *a priori* de probabilități în sensul lui Jaynes.

O explicitare a unei astfel de situații specifică faptul că varianta hidrodinamică a unei mecanici fractale este abordată mai ușor. Mai mult, teoria măsurii cuantice poate deveni un caz particular al unei posibile teorii a măsurii fractale la o scară de rezoluție dată.

## Bibliografie generală


1. A.T. Abed, M.J. Abu-AlShaer, A.M. Jawad, *Fractal Antennas for Wireless Communications*, 2020, DOI: 10.5772/intechopen.90332.
2. M. Adam, D. Lairez, *Fractal conformation of polymers*, Fractals, World Scientific, Vol. 01, no. 02, 149-169, https://doi.org/10.1142/S0218348X93000174.
3. M. Agop, A. Gavriluț, G. Crumpei, B. Doroftei, *Informational Non-differentiable Entropy and Uncertainty. Relations in Complex Systems*, Entropy, 2014, 16, 6042-6058.
4. M. Agop, A. Gavriluț, G. Ștefan, B. Doroftei, *Implications of Non-differentiable Entropy on a Space-Time Manifold*, Entropy, 2015, 17, 2184-2197.
5. M. Agop, A. Gavriluț, G. Crumpei, **G. Gavriluț**, *On a new possible class of cellular neural network*, Proceedings of the 11$^{th}$ International Conference Constructive and technological design optimization in the machines building field OPROTEH – 2015, Bacău, 4-6 iunie, 2015.
6. M. Agop, A. Gavriluț, V.P. Păun, D. Filipeanu, F.A. Luca, C. Grecea, L. Topliceanu, *Fractal Information by Means of Harmonic Mappings and Some Physical Implications*, Entropy, 2016, 18, 160.
7. M. Agop, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, I. Butuc, D.D. Iacob, *Elastic and plastic type behaviours in the fractal theory of motion at the nanoscale level*, Capitol în *Advances in Nonlinear Dynamics Research*, Editor Margaret Palmer, Nova Publishers, New York, 2017, 29-60.
8. M. Agop, V.P. Păun, *On the New Perspectives of Fractal Theory. Fundaments and Applications*, Editura Academiei Române, București, 2017.
9. J. Andres, J. Fišer, *Metric and Topological Multivalued Fractals*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 14, 4, 1277−1289 (2004).
10. J. Andres, M. Rypka, *Multivalued Fractals and Hyperfractals*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 22, 1, 1250009, 27 (2012).
11. K.M.R. Audenaert, *Subadditivity of q-entropies for* $q > 1$, J. Math. Phys. 48 (2007), 083507.
12. R.J. Aumann, L.S. Shapley, *Values of Non-atomic Games*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
13. Y. Bar–Yam, *Dynamics of Complex Systems*, Taylor and Francis, New York, 1999.
14. D. Barbilian, *Die von einer Quantik induzierte Riemannsche Metrik*, Comptes Rendus de l’Academie Roumaine des Sciences, Vol. 2, p. 198, 1937.
15. M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press (1988).
16. J. Blackledge, M. Lamphiere, *A review on the fractal market hypothesis for trading and market price prediction*, Mathematics, 2022, 10, 117, https: //doi.org/10.3390/math10010117.
17. I. Butuc, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, L.D. Duceac, *Differentiable and non-differentiable cellular neural networks with implications in the bacterial growth process. Properties (II)*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași,

Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 62 (66), No. 1, 2016, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, 77-84.
18. P. Cavaliere, F. Ventriglia, *On nonatomicity for non-additive functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 415, 1 (2014), 358-372.
19. I. Chițescu, *Finitely purely atomic measures and $\mathcal{L}^p$-spaces*, An. Univ. Bucuresti St. Natur. 24 (1975), 23-29.
20. I. Chițescu, *Finitely purely atomic measures: coincidence and rigidity properties*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 50 (2001), No. 3, 455-476.
21. D. Costarelli, A. Croitoru, A. Gavriluț, A. Iosif, A.R. Sambucini, *The Riemann Lebesgue Integral of Interval-Valued Multifunctions*, Mathematics, 8 (2020), 2250, DOI:10.3390/math8122250.
22. D. Costarelli, M. Seracini, G. Vinti, *A segmentation procedure of the pervious area of the aorta artery from CT images without contrast medium*, Math. Methods Appl. Sci., 43 (2020), 114–133.
23. D. Costarelli, M. Seracini, G. Vinti, *A comparison between the sampling Kantorovich algorithm for digital image processing with some interpolation and quasi-interpolation methods*, Appl. Math. Comput., 374 (2020), 125046.
24. J. Cresson, F.B. Adda, *Quantum derivatives and the Schrödinger equation*, Chaos Solitons Fract. 19, 1323 – 1334 (2004).
25. C.P. Cristescu, *Nonlinear dynamics and chaos. Theoretical fundaments and applications*, Editura Academiei Române, București, 2008.
26. A. Croitoru, A. Gavriluț, N.E. Mastorakis, **G. Gavriluț**, *On different types of non-additive set multifunctions*, Wseas Transactions on Mathematics, Issue 6, Vol. 8, 2009, 246-257.
27. A. Croitoru, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, *Semi-convex set multifunctions*, https://www.researchgate.net/publication/254216444_SEMI-CONVEX SET MULTIFUNCTIONS.
28. G. Crumpei, A. Gavriluț, M. Agop, I. Crumpei Tanasă, **G. Gavriluț**, *The need for a transdisciplinary approach to explain human brain structure and functioning mechanisms*, Bulletin of Integrative Psychiatry, Vol. 4, Issue 67, 2015, 15-22.
29. G. Crumpei, A. Gavriluț, M. Agop, I. Crumpei Tanasă, **G. Gavriluț**, *New Paradigms on Information, Reality and Mind*, HSS, Vol. V, No. 1 (2016), 135-148.
30. A.P. Dempster, *Upper and lower probabilties induced by a multivalued mapping*, Ann. Math. Statist. 38 (1967), 325-339.
31. N. Dinculeanu, *Teoria Măsurii și Funcții Reale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
32. L. Drewnowski, *Topological rings of sets, continuous set functions, Integration*, I, II, III, Bull. Acad. Polon. Sci., 20 (1972), 269-276, 277-286, 439-445.
33. F.J. Ernst, *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem*, Phys. Rev., Vol. 167, p. 1175, 1968.

34. F.J. Ernst, *New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. II*, Phys. Rev, Vol. 168, p. 1415, 1968.
35. F.J. Ernst, *Exterior-algebraic derivation of Einstein field equations employing a generalised basis*, Journal of Math. Phys., Vol. 12, p. 2395, 1971.
36. K. Falconer, *Fractal Geometry*, 2nd Ed. (Wiley, Chichester, West Sussex, England, 2003).
37. K.J. Falconer, T.C. O'Neil, *Vector-Valued Multifractal Measures*, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 452, No. 1949 (Jun. 8, 1996), 1433-1457.
38. R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, MacGraw-Hill, New York, 1965.
39. H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Science*, Dover Publication, New York, 1989.
40. D.H. Fremlin, *Measure Theory*, Vol. 1, 2000, https://wiki.math .ntnu.no/_media/tma4225/2011/fremlin-mt1.pdf.
41. A. Gavriluț, A. Croitoru, N.E. Mastorakis, **G. Gavriluț**, *Measurability and Gould integrability in finitely purely atomic multisubmeasure spaces*, WSEAS Transactions on Mathematics, Vol. 8, Issue 8, 2009, 435-444.
42. A. Gavriluț, M. Agop, *O Abordare Matematică în Studiul Dinamicii Sistemelor Complexe*, Editura ArsLonga, Iași, 2013.
43. A. Gavriluț, M. Agop, *An Introduction to the Mathematical World of Atomicity through a Physical Approach*, Editura ArsLonga, Iași, 2016.
44. A. Gavriluț, B. Constantin, **G. Gavriluț**, M. Agop, *Approximation properties from a mathematical physical perspective. Possible correlations with the neuronal network fractality*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică, Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 62 (66), No. 1, 2016, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, 9-22.
45. **G. Gavriluț**, A. Gavriluț, M. Agop, *Extended Minimal Atomicity through Non-differentiability: A Mathematical-Physical Approach*, Advances in Mathematical Physics 2019 (160), 1-16, DOI: 10.1155/2019/8298691.
46. **G. Gavriluț**, L. Topliceanu, M. Gîrțu, A.M. Rotundu, Șt.A. Irimiciuc, M. Agop, *Assessment of Complex System Dynamics via Harmonic Mapping in a Multifractal Paradigm*, Mathematics, 2021, *9*(24), 3298; https://doi.org /10.3390/math9243298.
47. **G. Gavriluț**, G. Crumpei, I. Daruc, L.D. Duceac, *Differentiable and non-differentiable cellular neural networks with implications in the bacterial growth process. A mathematical model (I),* Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 62 (66), No. 1, 2016, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, 67-75.
48. **G. Gavriluț**, *Variants of atomicity and some physical applications*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 64 (68), No. 2, 2018, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică.
49. **G. Gavriluț**, *Câteva considerații asupra atomicității funcțiilor de mulțime*,

Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, trimis spre publicare.
50. G. **Gavriluț**, *Tipuri de proceduri operaționale în descrierile de dinamici*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, trimis spre publicare.
51. **G. Gavriluț** *et al*., *Two scenarios in the description of the wave-corpuscle duality in a multifractal theory of motion*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, trimis spre publicare.
52. R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 2012.
53. S. Gudder, *Quantum measure theory*, Mathematica Slovaca, 60 (2010), 681-700.
54. S. Gudder, *Quantum measure and integration theory*, J. Math. Phys. 50, (2009), 123509.
55. S. Gudder, *Quantum integrals and anhomomorphic logics*, arXiv: quant-ph (0911.1572), 2009.
56. S. Gudder, *Quantum measures and the coevent interpretatio*n, Rep. Math. Phys. 67 (2011), 137-156.
57. S. Gudder, *Quantum measures and integrals*, https://arxiv.org/abs/ 1105.3781.
58. S. Hart, A. Neyman, *Values of non-atomic vector measure games: Are they linear combinations of the measures?*, J. Math. Econom., Vol. 17, Issue 1, 1988, 31–40.
59. J.B. Hartle, *The quantum mechanics of cosmology*, 1989, Lectures at Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes, Jerusalem, Israel, Dec 27, 1989 - Jan 4, 1990.
60. J.B. Hartle, *Spacetime quantum mechanics and the quantum mechanics of spacetime*, in *Proceedings of the Les Houches Summer School on Gravitation and Quantizations*, Les Houches, France, 6 Jul - 1 Aug 1992, eds J. Zinn-Justin, and B. Julia, North-Holland (1995), arXiv:gr-qc/9304006.
61. A.S. Holevo, *Quantum Systems, Channels, Information*, De Gruyter 2019, https://doi.org/10.1515/9783110642490-007.
62. P.M. Iannaccone, M. Khokha, *Fractal Geometry in Biological Systems: An Analitical Approach*, 1995.
62. E.A. Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 1993.
64. E.T. Jaynes, *The well posed problem*, Foundations of Physics, Vol. 3 (1973), 477-493.
65. A. Jurio, D. Paternain, C. Lopez-Molina, H. Bustince, R. Mesiar, G. Beliakov, *A construction method of interval-valued fuzzy sets for image processing*, 2011 IEEE Symposium on Advances in Type-2 Fuzzy Logic Systems, (2011).

66. V. Kadets, *A Course in Functional Analysis and Measure Theory*, Springer, 2018.
67. M. Khare, A.K. Singh, *Atoms and Dobrakov submeasures in effect algebras*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 159, 9 (2008), 1123-1128.
68. H. Kunze, D. La Torre, F. Mendivil, *Fractal-Based Methods in Analysis*, Springer, 2011.
69. S. Lang, *Elliptic Functions*, Springer, 2012.
70. N. Laskin, *Fractional Quantum Mechanics*, Physical Review E, 62, 3135-3145.
71. J. Li, R. Mesiar, E. Pap, *Atoms of weakly null-additive monotone measures and integrals*, Information Sciences, 2014, 134-139.
72. J. Li, R. Mesiar, E. Pap, E.P. Klement, *Convergence theorems for monotone measures*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 281, 2015, 103-127.
73. C. Lopez-Molina, B. De Baets, E. Barrenechea, H. Bustince, *Edge detection on intervalvalued images*, Advances in Intelligent and Soft Computing, 107 (2011), 325–337.
74. S.P. Malinowski, M.Y. Leclerc, *Fractal properties of temperatures fluctuations in the convective surface layers*, Boundary-Layer Meteorology, 71, 1994, 169-187.
75. B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Updated and augm. ed.), W.H. Freeman, New York, 1983.
76. N. Mazilu, M. Agop, *Skyrmions. A Great Finishing Touch to Classical Newtonian Philosophy*, World Philosophy Series, Nova Science Publishers, New York, 2011.
77. I. Mercheș, M. Agop, *Differentiability and Fractality in Dynamics of Physical Systems*, World Scientific Publishing House, 2015.
78. R. Mesiar, J. Li, Y. Ouyang, *On the equality of integrals*, Information Sciences, 393 (2017), 82-90.
79. M. Mihăileanu, *Geometrie Diferențială, Proiectivă și Analitică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
80. M. Mitchell, *Complexity: A Guided Tour*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
81. L. Nottale, *Scale Relativity and Fractal Space-Time. A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*, Imperial College Press, London, 2011.
82. L. Ochiuz, D. Timofte, D. Vasincu, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, M. Agop, *Non-linearities in drug release processes from polymeric microparticles: Implications in the fractal morpho-functional structure of biological systems*, Capitol în *Advances in Nonlinear Dynamics Research*, Editor Margaret Palmer, Nova Publishers, New York, 2017, 113-164.
83. L. Olsen, *A multifractal formalism*, Adv. Math. 116, 82 (1995).
84. Y. Ouyang, J. Li, R. Mesiar, *Relationship between the concave integrals and the pan-integrals on finite spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 424, No. 2, 975-987, 2015.

85. E. Pap, *The range of null-additive fuzzy and non-fuzzy measures*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 65, 1 (1994), 105-115.
86. E. Pap, *Some Elements of the Classical Measure Theory* (Capitolul 2 în *Handbook of Measure Theory*), 2002, 27-82.
87. E. Pap, *Null-additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
88. E. Pap, *Regular null-additive monotone set functions*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak., Ser. Mat. 25, 2 (1995), 93-101.
89. D. Petz, *Monotonicity of quantum relative entropy revisited*, Reviews in Mathematical Physics, Vol. 15, No. 01, 79-91 (2003), https://doi.org/10.1142/S0129055X03001576.
90. A.C. Phillips, *Introduction to Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 2003.
91. A.M. Precupanu, *Bazele Analizei Matematice*, Editura Polirom, Iași, 1998.
92. A.M. Precupanu, *Analiză Matematică. Măsură și Integrală*, Editura Universității Al.I. Cuza, Iași, 2006.
93. K.P.S.B. Rao, M.B. Rao, *Theory of Charges*, Academic Press, Inc., New York, 1983.
94. H.L. Royden, *Real Analysis* (3rd ed.), New York: Macmillan, 1988.
95. R. Salgado, *Some identities for the q-measure and its generalizations*, Modern Phys. Fiet. A 17 (2002), 711-728.
96. B. Schweizer, A. Sklar, (1983), *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier Science Publishing Co., Inc. Republished in 2005 by Dover Publications, Inc., with a new preface, errata, notes, and supplementary references.
97. C.Y. She, H. Heffner, *Simultaneous Measurement of Noncommuting Observables*, Phys. Rev. 152, 1103, 1966.
98. K.S.Sim, M.E.Nia, C.P.Tso, T.K.Kho, *Brain Ventricle Detection Using Hausdorff Distance*, Chapter in *Emerging Trends in Applications and Infrastructures for Computational Biology, Bioinformatics, and Systems Biology*, Systems and Applications, Emerging Trends in Computer Science and Applied Computing, 2016, 523-531.
99. R.D. Sorkin, *Quantum Mechanics as Quantum Measure Theory*, Modern Physics Letters A, Vol. 09, No. 33, 1994, 3119-3127.
100. R. Sorkin, *Quantum Dynamics without the Wave Function*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007), 3207-3231.
101. R.D. Sorkin, *Quantum Measure Theory and Its Interpretation*, în *Quantum Classical Correspondence*: Proceedings of the 4th Drexel Symposium on Quantum Non-integrability, 229-251, International Press, Cambridge Mass. 1997, D.H. Feng and B-L Hu (editors).
102. R. Sorkin, *Quantum mechanics as quantum measure theory*, arXiv:gr-qc/9401003.
103. K.R. Sreenivasan, *Fractals and Multifractals in Fluid Turbulences*, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 23, 1991, 539-604.
104. D. Stoler, *Equivalence Classes of Minimum Uncertainty Packets*, Phys. Rev. D 1, 3217, 1970.

105. D. Stoler, *Equivalence Classes of Minimum-Uncertainty Packets. II*, Phys. Rev. D 4, 1925, 1971.
106. S. Surya, P. Waldlden, *Quantum covers in q-measure theory*, ArXiv: quant-ph 0809.1951 (2008).
107. S. Susanu, M. Popescu, B. Caba, P. Plămădeală, A. Moraru, D. Costin, **G. Gavriluț**, M. Agop, G. Cioca, *Accelerating the Bone Healing Process by the Intervention of the Platelet Growth Factors Impregnated in Collagen. An experimental and theoretical mathematical model*, Materiale Plastice (Mater. Plast.), 2019, Vol. 56, Issue 4, 973-979, https://doi.org/10.37358/MP.19.4.5294, 973-979.
108. L. Susskind, *Copenhagen vs Everett Teleportation, and ER ≡ EPR*, arXiv: 1604.02589v2, 23 April, 2016.
109. L. Susskind, *ER ≡ EPR,GHZ, and the consistency of quantum measurements,* Fortsch. Phys. 64, 72 (2016).
110. H. Suzuki, *Atoms of fuzzy measures and fuzzy integrals*, Fuzzy Sets and Systems, 41 (1991), 329-342.
111. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley and Sons, New York, 1989.
112. Y.-T. Tai, A. Hanson, G. Ortiz, A. Sabry, *Quantum Interval-Valued Probability: Contextuality and the Born Rule*, Physical Review A: General Physics 97(5): 052121, 2017, DOI: 10.1103/PhysRevA.97.052121.
113. K. Weichselberger, *The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty*, Internat. J. Approx. Reason., 24 (2000), 149–170.
114. K.R. Wicks, *Fractals and Hyperspaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
115. C. Wu, S. Bo, *Pseudo-atoms of fuzzy and non-fuzzy measures*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 1258-1272.

## Lucrări publicate de către autor:


**1.** M. Agop, A. Gavriluț, G. Crumpei, **G. Gavriluț**, ***On a new possible class of cellular neural network***, Proceedings of the 11th International Conference Constructive and technological design optimization in the machines building field OPROTEH – 2015, Bacău, 4-6 iunie, 2015.

**2.** M. Agop, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, I. Butuc, D.D. Iacob, ***Elastic and plastic type behaviours in the fractal theory of motion at the nanoscale level***, Capitol în ***Advances in Nonlinear Dynamics Research***, Editor Margaret Palmer, Nova Publishers, New York, 2017, 29-60, **ISI book**.

**3.** I. Butuc, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, L.D. Duceac, ***Differentiable and non-differentiable cellular neural networks with implications in the bacterial growth process. Properties (II)***, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 62 (66), No. 1, 2016, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, 77-84.

**4.** A. Croitoru, A. Gavriluț, N.E. Mastorakis, **G. Gavriluț**, ***On different types of non-additive set multifunctions***, Wseas Transactions on Mathematics, Issue 6, Vol. 8, 2009, 246-257.

**5.** A. Croitoru, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, ***Semi-convex set multifunctions***, https://www.researchgate.net/publication/254216444_SEMI CONVEX SET MULTIFUNCTIONS.

**6.** G. Crumpei, A. Gavriluț, M. Agop, I. Crumpei Tanasă, **G. Gavriluț**, ***The need for a transdisciplinary approach to explain human brain structure and functioning mechanisms***, Bulletin of Integrative Psychiatry, Vol. 4, Issue 67, 2015, 15-22.

**7.** G. Crumpei, A. Gavriluț, M. Agop, I. Crumpei Tanasă, **G. Gavriluț**, ***New Paradigms on Information, Reality and Mind***, HSS, Vol. V, No. 1 (2016), 135-148.

**8.** A. Gavriluț, A. Croitoru, N.E. Mastorakis, **G. Gavriluț**, ***Measurability and Gould integrability in finitely purely atomic multisubmeasure spaces***, WSEAS Transactions on Mathematics, Vol. 8, Issue 8, 2009, 435-444.

**9.** **G. Gavriluț**, A. Gavriluț, M. Agop, ***Extended Minimal Atomicity through Non-differentiability: A Mathematical-Physical Approach***, Advances in Mathematical Physics 2019 (160), 1-16, DOI: 10.1155/2019/8298691, **IF 1.128**.

**10.** **G. Gavriluț**, L. Topliceanu, M. Gîrțu, A.M. Rotundu, Șt.A. Irimiciuc, M. Agop, ***Assessment of Complex System Dynamics via Harmonic Mapping in a Multifractal Paradigm***, Mathematics, 2021, 9(24), 3298; https://doi.org/10.3390/math9243298, **IF 2.258**.

**11.** **G. Gavriluț**, G. Crumpei, I. Daruc, L.D. Duceac, ***Differentiable and non-differentiable cellular neural networks with implications in the bacterial growth process. A mathematical model (I),*** Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 62 (66), No. 1, 2016, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, 67-75.

**12.** **G. Gavriluț**, ***Variants of atomicity and some physical applications***, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Vol. 64 (68), No. 2, 2018, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică.

**13.** **G. Gavriluț**, ***Câteva considerații asupra atomicității funcțiilor de mulțime***, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, trimis spre publicare.

**14.** **G. Gavriluț**, ***Wave-corpuscle duality in the sense of Susskind in a fractal theory of motion***, Mathematics, trimis spre publicare.

**15.** **G. Gavriluț,** ***Tipuri de proceduri operaționale în descrierile de dinamici***, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, Secția matematică. Mecanică teoretică. Fizică, trimis spre publicare.

**16.** **G. Gavriluț** et al., ***Two scenarios in the description of the wave-corpuscle duality in a multifractal theory of motion***, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iași, trimis spre publicare.

**17.** L. Ochiuz, D. Timofte, D. Vasincu, A. Gavriluț, **G. Gavriluț**, M. Agop, ***Non-linearities in drug release processes from polymeric microparticles: Implications in the fractal morpho-functional structure of biological systems***, Capitol în ***Advances in Nonlinear Dynamics Research***, Editor Margaret Palmer, Nova Publishers, New York, 2017, 113-164, **ISI book**.

**18.** S. Susanu, M. Popescu, B. Caba, P. Plămădeală, A. Moraru, D. Costin, **G. Gavriluț**, M. Agop, G. Cioca, ***Accelerating the Bone Healing Process by the Intervention of the Platelet Growth Factors Impregnated in Collagen. An experimental and theoretical mathematical model***, Materiale Plastice (Mater. Plast.), 2019, Vol. 56, Issue 4, 973-979, https://doi.org/10.37358/MP.19.4.5294,973-979, **IF 0.593**.