Rezolvare

a) Proiectilul este lansat din originea sistemului de referinţă, iar ecuaţiile de mişcare în planul xy sunt:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha,$$
$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (0.5p) \tag{1}$$

Ecuaţia traiectoriei

$$y(x) = x\tan(\alpha) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \quad (0.5p) \tag{2}$$

Pentru $x = d$ rezultă $y(d) = h = nd$

$$nd = d\tan(\alpha) - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \quad (1p) \tag{3}$$

se obţine viteza iniţială v_0

$$v_0^2 = \frac{gd}{2(\tan\alpha - n)\cos^2\alpha}, \quad \alpha \in [0, \pi/2) \tag{4}$$

Pentru a determina valoarea minimă a vitezei iniţiale facem derivata în raport cu unghiul α şi determinăm extremele funcţiei $f(\alpha) = v_0^2$

$$\frac{d(v_0^2)}{d\alpha} = \frac{gd}{2} \frac{(2\sin^2\alpha - 2n\sin\alpha\cos\alpha - 1)}{(\tan\alpha - n)^2\cos^4\alpha} \quad (1p) \tag{5}$$

Se exprimă toate funcţiile trigonometrice în funcţie de $\tan\alpha$ cu ajutorul formulelor $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$$\frac{d(v_0^2)}{d\alpha} = \frac{gd}{2} \frac{(\tan^2\alpha - 2n\tan\alpha - 1)(1 + \tan^2\alpha)}{(\tan\alpha - n)^2}. \quad (0.5p) \tag{6}$$

Punând condiţia $\frac{d(v_0^2)}{d\alpha} = 0$ se obţine

$$\tan^2\alpha - 2n\tan\alpha - 1 = 0 \quad (0.5p)$$
$$1 + \tan^2\alpha = 0 \tag{7}$$

şi se observă că doar prima ecuaţie din (7) este utilă pentru a determina tangenta unghiului de lansare. Rezolvând ecuaţia de gradul doi se obţin soluţiile:

$$\tan\alpha_{1,2} = n \pm \sqrt{n^2+1}, \tag{8}$$

iar dacă ţinem cont de faptul că $\alpha \in [0, \pi/2)$ atunci doar soluţia cu semnul plus satisface problema

$$\tan\alpha_1 = n + \sqrt{n^2+1}. \quad (0.5p) \tag{9}$$

Pentru $\tan\alpha = \tan\alpha_1$ viteza iniţială prezintă un minim care se obţine dacă înlocuim (9) în (4):

$$v_{0min}^2 = \frac{gd}{2(\tan\alpha_1 - n)\cos^2\alpha_1} = \frac{gd[1+(n+\sqrt{n^2+1})^2]}{2\sqrt{n^2+1}} = gd(n+\sqrt{n^2+1}) \quad (0.5p) \tag{10}$$

de unde obţinem

$$v_{0min} = \sqrt{gd(n+\sqrt{n^2+1})} \quad (0.5p) \tag{11}$$

Energia minimă de lansare

$$E_{min} = \frac{mv_{0min}^2}{2} = \frac{mgd(n+\sqrt{n^2+1})}{2} \quad (0.5p) \tag{12}$$

b) Din condiţia $y(d) = 0$ obţinem

$$d\tan(\alpha) - \frac{gd^2}{2{v_0'}^2\cos^2\alpha} = 0 \quad (0.5p) \tag{13}$$

sau

$$d = \frac{2{v_0'}^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}. \quad (0.5p) \tag{14}$$

Exprimăm funcţiile trigonometrice în funcţie de d şi h

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad (1p) \\ \cos\alpha &= \frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \end{aligned} \tag{15}$$

Dacă înlocuim în ecuaţia (14) obţinem:

$$d = \frac{2{v'_0}^2}{g}\frac{n}{n^2+1}, \quad (0.5p) \tag{16}$$

iar viteza iniţială de lansare este

$$v'_0 = \sqrt{\frac{gd(n^2+1)}{2n}} \quad (0.5p) \tag{17}$$

Punctaj a) 6p
Punctaj b) 3p
Punctaj din oficiu 1
Total 10