

Problema Termodinamică (Craiova) 2022 - Concursul Dragomir Hurmuzescu.

Stabiliți ecuația transformării în variabile (T, V) [adică o funcție de forma $f(T, V) = \text{const}$] pentru un kilomol de gaz ideal, pentru fiecare din următoarele cazuri:

- a) $C(T) = C_V + \alpha T$
- b) $C(V) = C_V + \beta V$
- c) $C(p) = C_V + ap$
- d) $C(T) = a + bT^2$

Rezolvare/Barem

(3p) Folosim expresia matematică a principiului întâi al termodinamicii pentru sisteme simple (sisteme descrise de un singur parametru extensiv și un singur parametru intensiv), adică

$$\delta Q = dU + pdV$$

Utilizând definiția căldurii kilomolare $\delta Q = C dT$ vom obține:

$$C dT = C_V dT + p dV$$

Folosim expresia presiunii din ecuația termică de stare a gazului ideal, $pV = \nu RT$ și obținem

$$(C - C_V) dT = RT \frac{dV}{V}$$

Vom aplica acest rezultat la condițiile impuse de problemă.

- a) **(1,5p)** Introducând $C - C_V = \alpha T$ în rezultatul anterior vom obține:

$$\alpha dT = R \frac{dV}{V}$$

Prin integrare în ambii membri obținem:

$$\frac{\alpha}{R} \int dT = \int \frac{dV}{V}$$

adică

$$\ln V = \frac{\alpha}{R} T + \text{const}$$

Deci, ecuația transformării este în acest caz este:

$$f(T, V) \equiv V \exp\left(-\frac{\alpha}{R} T\right) = \text{const}$$

- b) **(1,5p)** pentru $C - C_V = \beta V$ avem

$$\beta \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V^2}$$

Prin integrare obținem:

$$\beta \ln T = -\frac{R}{V} + \ln(\text{const})$$

Ecuația transformării este:

$$f(T, V) \equiv T \exp\left(\frac{R}{\beta V}\right) = \text{const}$$

c) **(1,5p)** pentru $C - C_V = ap$

$$apdT = RT \frac{dV}{V}$$

Folosim expresia presiunii din ecuația termică de stare a gazului ideal:

$$a \left(\frac{RT}{V} \right) dT = RT \frac{dV}{V}$$
$$adT = dV$$

Prin integrare vom obține:

$$aT = V + \text{const}$$
$$f(T, V) \equiv V - aT = \text{const}$$

d) **(1,5p)** Procedând analog cazurilor precedente obținem:

$$(a + bT^2 - C_V) \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V}$$

Prin integrare:

$$\frac{a - C_V}{R} \ln T + \frac{b}{2R} T^2 = \ln V + \text{const}$$

si rearanjare algebrica obținem ecuația transformării:

$$f(T, V) \equiv VT^{(C_V - a)/R} \exp \left(-\frac{bT^2}{2R} \right) = \text{const.}$$

Oficiu: (1p)