

**Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XII-a, etapa națională, Cluj-Napoca, 13 aprilie 2024
Subiecte – anul II**

pagina 1 din 3

Subiect

O cantitate de oxigen (considerat gaz ideal) se află într-un cilindru izolat termic și închis la ambele capete. Cilindrul este împărțit inițial în două compartimente egale de un piston diaterm fixat în centrul cilindrului și care se poate mișca fără frecare. În partea stângă se află 2l de oxigen la presiunea de 4 atmosfere și temperatura de 300 K. Iar în partea dreaptă se află 2l de oxigen la presiunea de 2 atmosfere și temperatura de 300 K. Pistonul este eliberat și se deplasează într-o poziție de echilibru. Determinați valorile finale ale temperaturii și presiunii în cilindru. Calculați variația entropiei totale și comentați rezultatul obținut pentru variația entropiei totale. ($\ln 4/3 \sim 0.29$ și $\ln 3/2 \sim 0.4$).

Barem

Deoarece sistemul este izolat de exterior (izolat termic și mecanic), energia internă totală nu se modifică. În plus, pistonul este diaterm și gazul din cele două compartimente este considerat gaz ideal, rezultă că temperatura finală este aceeași cu cea inițială:

$$T_i = T_f = 300 \text{ K}$$

.....1p

În starea de echilibru final, atât presiunile cât și temperaturile celor două mase de gaz vor fi egale. Volumul inițial al fiecărui compartiment fiind $V = 2l$, putem scrie:

1. pentru compartimentul din stanga ($T = \text{const.}$)

$$p_1 V = p V_1 (1)$$

2. pentru compartimentul din dreapta ($T = \text{const.}$)

$$p_2 V = p V_2 (2)$$

În plus avem:

$$V_1 + V_2 = 2V (3)$$

Împărțim relația (1) la (2) și obținem:

$$\frac{p_1 V}{p_2 V} = \frac{p V_1}{p V_2} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} = 2; V_1 = 2V_2 (4)$$

unde $p_1 = 4 \text{ atm}$ și $p_2 = 2 \text{ atm}$

Din relațiile (3) și (4) obținem:

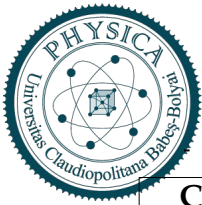
$$3V_2 = 2V \rightarrow V_2 = \frac{2}{3}V = \frac{4}{3}l \text{ și } V_1 = \frac{4}{3}V = \frac{8}{3}l$$

$$p = p_1 \frac{V}{V_1} = \frac{3}{4}p_1 = \frac{3}{2}p_2 = 3 \text{ atm}$$

.....2p

Variația de entropie a sistemului se poate calcula ca suma a variațiilor de entropie a celor două subsisteme. Cum nu știm din start că procesul care leagă stările de echilibru inițială și finală este reversibil, pentru calcularea variației oricărei mărimi de stare, folosim un proces reversibil fictiv care leagă cele două stări. Astfel pentru fiecare subsistem putem considera că

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.

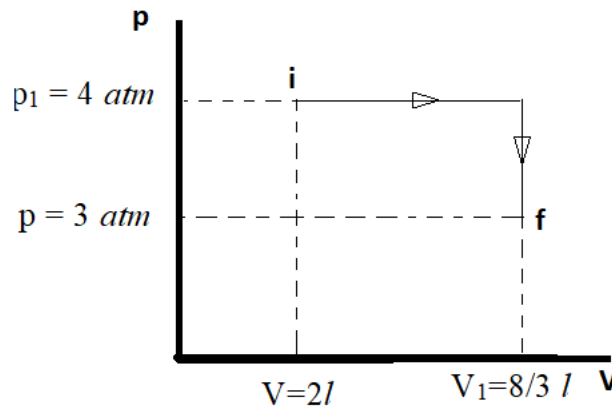


**Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XII-a, etapa națională, Cluj-Napoca, 13 aprilie 2024
Subiecte – anul II**

pagina 2 din 3

procesul care leagă stările de echilibru inițială și finală este o succesiune dintre un proces izobar și unul izocor, ambele reversibile.

Pentru compartimentul din stânga (figura de mai jos)



Variația de entropie a sistemului din partea stângă luând în considerare cele două transformări reversibile este:

$$\Delta S_1 = \int_{\text{izobara}}^{V \rightarrow V_1} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\text{izocora}}^{p_1 \rightarrow p} \frac{\delta Q}{T} = \nu_1 C_p \int_V^{4V/3} \frac{dT}{T} + \nu_1 C_v \int_{p_1}^{3p_1/4} \frac{dT}{T}$$

Pe izobara reversibilă avem însă $\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}$, iar pe izocora reversibilă $\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p}$, astfel încât:

$$\Delta S_1 = \nu_1 C_p \int_V^{4V/3} \frac{dV}{V} + \nu_1 C_v \int_{p_1}^{3p_1/4} \frac{dp}{p} = \nu_1 C_p \ln \frac{4}{3} + \nu_1 C_v \ln \frac{3}{4} = \nu_1 (C_p - C_v) \ln \frac{4}{3} = \nu_1 R \ln \frac{4}{3}$$

Numărul de moli se poate calcula din ecuația termică de stare pentru fiecare subsistem:

$$\nu_1 = \frac{p_1 V}{RT}$$

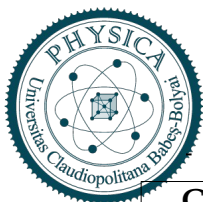
$$\Delta S_1 = \nu_1 R \ln \frac{4}{3} = \frac{p_1 V}{T} \ln \frac{4}{3} \approx 0.78 \text{ J/K}$$

.....
2.5p

Similar se poate afla variația de entropie a sistemului din partea dreaptă:

$$\Delta S_2 = \int_{\text{izobara}}^{V \rightarrow V_2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{\text{izocora}}^{p_2 \rightarrow p} \frac{\delta Q}{T} = \nu_2 C_p \int_V^{2V/3} \frac{dT}{T} + \nu_2 C_v \int_{p_2}^{3p_2/2} \frac{dT}{T} = i$$

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



**Concursul Național Studențesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XII-a, etapa națională, Cluj-Napoca, 13 aprilie 2024
Subiecte – anul II**

pagina 3 din 3

Pe

izobara reversibilă avem însă $\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V}$, iar pe izocora reversibilă $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P}$, astfel încât:

$$\Delta S_2 = \nu_1 C_p \int_V^{2V/3} \frac{dV}{V} + \nu_1 C_v \int_{p_2}^{3p_2/2} \frac{dp}{p} = \nu_2 C_p \ln \frac{2}{3} - \nu_2 C_v \ln \frac{2}{3} = \nu_2 (C_p - C_v) \ln \frac{2}{3} = -\nu_2 R \ln \frac{3}{2}$$

Numărul de moli pentru compartimentul din dreapta este:

$$\nu_2 = \frac{p_2 V}{RT}$$

de unde:

$$\Delta S_2 = -\nu_2 R \ln \frac{3}{2} = -\frac{p_2 V}{T} \ln \frac{3}{2} \cong -0.54 \text{ J/K}$$

2.5p

Variația de entropie a sistemului este:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0.78 \text{ J/K} - 0.54 \text{ J/K} = 0.24 \text{ J/K}.$$

Valoarea strict pozitivă a variației de entropie indică faptul că procesul descris este *irreversibil*.

Oficiu

1p

Total 10p

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.

Barem – Subiectul II - Electricitate și magnetism

1p – oficiu

Punctul a) – 2p

Se observă că $\rho(r = 0) = c$, adică c este densitatea de sarcină electrică în centrul sferei, ρ_o .

0,5p

$$\rho(r) = \rho_o \left(1 - \frac{r}{R}\right) \text{ și } Q = \iiint_V dv \rho(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^R dr r^2 \rho_o \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad 0,5p$$

$$Q = 4\pi\rho_o \left(\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{4R}R^4\right) = \frac{1}{3}\pi\rho_o R^3, \quad 0,5p$$

de unde

$$\rho_o = \frac{3Q}{\pi R^3}. \quad 0,5p$$

Punctul b) – 2,5p

Distribuția are simetrie sferică deci se poate aplica legea lui Gauss sub formă globală.

Se alege ca suprafață Gauss o suprafață sferică $S(r)$, de rază r , $r \leq R$.

$$\oint_{S(r)} \vec{da}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S(r))} dv(\vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad 0,5p$$

$$E(r) \oint_{S(r)} da(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^r dr' r'^2 \rho_o \left(1 - \frac{r'}{R}\right),$$
$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \rho_o \left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{4R}r^4\right), \quad E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_o \left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{4R}r^2\right) \quad 1 p$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_o \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4R}r\right) \vec{r} = \frac{3Q}{\pi\epsilon_0 R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4R}r\right) \vec{r}. \quad 0,5p$$

Pentru $r = \frac{R}{2}$ se obține $E = \frac{3Q}{\pi\epsilon_0 R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4R} \frac{R}{2}\right) \frac{R}{2}$,

$$E = \frac{5Q}{16\pi\epsilon_0 R^2} \quad 0,5p$$

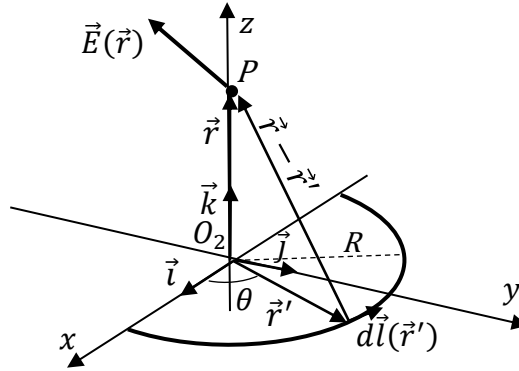
Punctul c) – 4,5p

Se determină câmpul electric $\vec{E}_1$ creat în P de distribuția sferică. Se folosește rezultatul de la punctul anterior, pentru $r = R$, adică $E_1 = \frac{3Q}{\pi\epsilon_0 R^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4R}R\right) R$,

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad 0,5p$$

Se determină câmpul electric $\vec{E}_2$ creat în P de distribuția filiformă de pe semispiră. Pentru aceasta se folosește principiul superpoziției pentru o distribuție filiformă exprimat prin relația

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\gamma dl(\vec{r}') \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \text{ (sau o relație echivalentă)}. \quad 0,5p$$



0,25p

Se scriu relațiile (sau relații echivalente):

$$\vec{r} = z\vec{k} = R\vec{k}, \quad \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} = \vec{i}R\cos\theta + \vec{j}R\sin\theta, \quad \vec{r} - \vec{r}' = -\vec{i}R\cos\theta - \vec{j}R\sin\theta + \vec{k}R,$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta + R^2} = R\sqrt{2}, \quad dl(\vec{r}') = Rd\theta, \quad \lambda(\vec{r}') = \lambda = \frac{Q}{\pi R}$$

0,5p

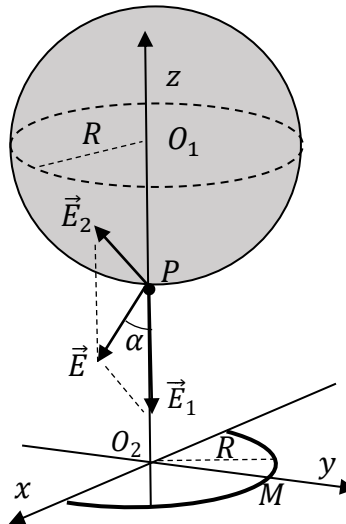
Folosind aceste relații se obține

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \frac{-\vec{i}R\cos\theta - \vec{j}R\sin\theta + R\vec{k}}{(R\sqrt{2})^3} = \frac{Q}{8\sqrt{2}\pi^2\epsilon_0 R^2} (-\vec{i} \int_0^\pi d\theta \cos\theta - \vec{j} \int_0^\pi d\theta \sin\theta + \vec{k} \int_0^\pi d\theta),$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2} \left(-\frac{2}{\pi} \vec{j} + \vec{k} \right)$$

0,5p

În sistemul de coordonate introdus $\vec{E}_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{k}$



0,25p

Se folosește principiul superpoziției și se determină, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$,

$$\vec{E} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \vec{j} - (4 - \sqrt{2}) \vec{k} \right) \equiv E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

0,5p

Modulul lui $\vec{E}$ este

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{\frac{8}{\pi^2} + 18 - 8\sqrt{2}} \quad \mathbf{0,5p}$$

Planul în care se află vectorul $\vec{E}$ este planul de simetrie al semispirei (plan determinat de axa semispirei și mijlocul acesteia M , planul yOz în cazul sistemului de referință ales). Aceasta deoarece $E_x = 0$.

Direcția lui $\vec{E}$ este pe o dreaptă din acest plan ce trece prin punctul P și un punct aflat pe dreapta determinată de mijlocul spirei M și centrul acesteia O_1 , punct aflat pe partea opusă a lui M în raport cu O_1 . Aceasta deoarece $E_y < 0$. Sensul lui $\vec{E}$ este spre exteriorul sferei, deoarece $E_z < 0$.

0,25p

Înclinația lui $\vec{E}$ față de axa semispirei este dată de relația

$$tg\alpha = \frac{|E_y|}{|E_z|}, \quad \mathbf{0,25p}$$

care conduce la

$$tg\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(4-\sqrt{2})} = \frac{2+4\sqrt{2}}{7\pi}, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{2+4\sqrt{2}}{7\pi}. \quad \mathbf{0,5p}$$

a) (3 puncte)

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{p_2}{p_1} \frac{p'_2}{p'_1}$$

$$p'_2 = \frac{f_2 p'_1}{f_2 + p'_1}$$

$$p_2 = \frac{f_1 p_1}{f_1 + p_1}$$

$$p'_1 = p_2 - d_0,$$

unde d_0 este distanta intre lentilele.

$$\gamma = \frac{p_2}{p_1} \frac{f_2}{p'_1 + f_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{f_2}{p_2 - d_0 + f_2} = \frac{\frac{f_1 p_1}{f_1 + p_1}}{p_1} \frac{f_2}{\frac{f_1 p_1}{f_1 + p_1} - d_0 + f_2} \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{f_1 f_2}{f_1 p_1 - d_0 f_1 - d_0 p_1 + f_1 f_2 + f_2 p_1} \quad (1)$$

Aplicam ecuatia (1) pentru $d_0 = 2d = f_1 + f_2$ si $\gamma = -3$:

$$f_2 = 3f_1$$

Aplicam ecuatia (1) pentru $d_0 = d = (f_1 + f_2)/2$ si $\gamma = -6$ folosind rezultatul $f_2 = 3f_1$:

$$9f_1^2 = -12p_1 f_1 \Rightarrow f_1 = -\frac{12p_1}{9} = 1 \text{ cm} \Rightarrow f_2 = 3f_1 = 3 \text{ cm}$$

b) (1,5 puncte)

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2} = 2 \text{ cm}$$

c) (2 puncte)

Micrometrul ocular trebuie pusa in punctul focal F_1 a ocularului. Pozitia punctului F_1 poate fi determinata asumand ca $p'_2 = \infty$

$$p'_2 = \infty \Rightarrow p'_1 = -f_2 = -3 \text{ cm}$$

$$p_2 = d_0 + p'_1 = d + p'_1 = -1 \text{ cm}$$

$$p_1 = \frac{p_2 f}{f - p_2} = -0,5 \text{ cm}$$

Deci, micrometrul ocular trebuie pusa inainte de ocular, la distanta o distanta de $l = 0,5 \text{ cm}$ fata de prima lentila a ocularului.

d) (2,5 puncte)

$$L = f_{ob} + l + d \Rightarrow f_{ob} = L - d - l = 142,5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f_{ok}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \Rightarrow f_{ok} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = 1,5 \text{ cm}$$

$$G = -\frac{f_{ob}}{f_{ok}} = -95$$