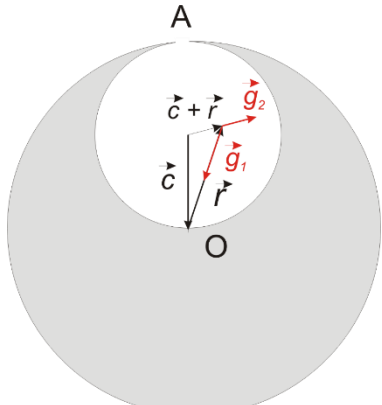


BAREM CORECTARE Mecanică I

Nr.	Soluție	Punctaj
a)	Considerăm o planetă plină și una de masă negativă care ocupă volumul cavității sferice de diametru R. Într-un punct P oarecare din cavitate, intensitatea câmpului gravitațional, $\vec{g}_P$, va fi dată de suma vectorială dintre intensitatea câmpului gravitațional creat de sfera de sub punctul P (orientat spre centrul sferei pline): $\vec{g}_1 = -\Gamma \frac{\rho 4\pi r^3}{3r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{4\pi}{3} \Gamma \rho r \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{4\pi}{3} \Gamma \rho \vec{r}$ și intensitatea câmpului gravitațional creat de sfera (de masă negativă), de rază $(\vec{r} + \vec{c})$ din "cavitate" (orientat radial înspre exteriorul cavității – din cauza masei negative): $\vec{g}_2 = \frac{4\pi}{3} \Gamma \rho (\vec{r} + \vec{c})$, adică $\vec{g}_p = \frac{4\pi}{3} \Gamma \rho \vec{c}$, un vector constant de mărime $g_p = \frac{2\pi}{3} \Gamma \rho R$. 	3.5p
b)	t_1 este o pătrime din perioada mișcării de oscilație pe care avea-o dacă tunelul ar străbate toată planeta. $t_1 = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{\Gamma \rho}}$. (1p) $v_1 = \omega_0 R = 2R \sqrt{\frac{\pi \Gamma \rho}{3}} \quad (0.5p)$ t_2 este timpul de cădere în câmp omogen g. $t_2 = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{3}{\pi \Gamma \rho}}$ (0.5p) iar viteza este $v_2 = g t_2 = 2R \sqrt{\frac{\pi \Gamma \rho}{3}}$, (0.5p) identică cu v_1. Rezultă: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\pi}{4}$ (0.25p) și $\frac{v_1}{v_2} = 1$ (0.25p)	3p
c)	Calculăm intensitatea câmpului gravitațional în punctul O pentru semisferă. E suma contribuțiilor elementelor de masă (coordonate sferice) $dm = \rho r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot d\theta$. Proiectăm pe "verticală" și obținem: $dg = \frac{\Gamma \rho r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot d\theta}{r^2} \cos \theta \text{ iar prin integrare vom avea: } g = \pi R \Gamma \rho$ (2p). Însă $g_0 = \frac{4\pi \Gamma \rho}{3} R$ de unde rezultă $g = \frac{3}{4} g_0 = 7.36 \text{ cm/s}^2$ (0.5p).	2.5p
Total Subiect		9p

BAREM CORECTARE Mecanică II

Nr.	Soluție	Punctaj
a)	În mișcarea circulară este adevărată relația: $\frac{\mu v^2}{R} = F_{cp} = \frac{G\mu M}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$ unde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 2M_{\odot}/3$ este masa redusă și $M = m_1 + m_2 = 3M_{\odot}$ e masa totală, iar $R = 27 \text{ U.A.}$. Știind că $v_{ref} = 30 \text{ km/s}$ pentru $M_{ref} = M_{\odot}$ și $R_{ref} = 1 \text{ U.A.}$, rezultă $v = v_{ref} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ U.A.}}{R} \right)^{1/2} = 10 \text{ km/s.}$ Perioada este $T = \frac{2\pi R}{v} = T_{ref} \frac{v_{ref} R}{v \cdot 1 \text{ U.A.}} = 81 \text{ ani.}$	2p
b)	În raport cu centrul de masă, avem $m_1 r_1 = m_2 r_2.$ Impunând $r_1 + r_2 = R$, rezultă $r_1 = \frac{m_2}{M} R = 9 \text{ U.A.}, r_2 = \frac{m_1}{M} R = 18 \text{ U.A.}$ Vitezele satisfac $v_1 = \omega r_1$ și $v_2 = \omega r_2$. Ținând cont că $\omega = v/R$, rezultă $v_1 = \frac{r_1}{R} v = \frac{10}{3} \text{ km/s}, v_2 = \frac{r_2}{R} v = \frac{20}{3} \text{ km/s.}$	2p
c)	Energia cinetică și cea potențială sunt $E_c = \frac{\mu v^2}{2}, E_p = -\frac{G\mu M}{R},$ Ținând cont de relația de la a), se poate obține $E_c = -E_p/2$. Impunând $E_c + E_p = E$, rezultă $E_c = -E, E_p = 2E.$	2p
d)	Viteza centrului de masă este $V = \frac{m_2 \bar{v}_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0,1 v_2 = \frac{2}{3} \text{ km/s.}$ Vitezele celor două stele relativ la noul centru de masă sunt $v_1' = v_1 + V = 4 \text{ km/s}, v_2' = \bar{v}_2 - V = 8 \text{ km/s.}$	2p
e)	În sistemul centrului de masă, $m_1 v_1' = m_2 v_2'$. Noua energie cinetică este $E_c' = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_2 M}{2m_1} v_2'^2 = 48 M_{\odot} (\text{km/s})^2.$ În mod similar, energia cinetică inițială este $E_c = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_2 M}{2m_1} v_2^2 = \frac{100}{3} M_{\odot} (\text{km/s})^2.$ Raportul lor va fi $\alpha = E_c' / E_c = 1,44$. Ținând cont că $E' = E_c' + E_p$ în momentul ciocnirii, obținem $E' = E_c' + E_p = \alpha \cdot (-E) + 2E = (2 - \alpha)E = 0,56E.$	1p
Total Subiect		9p

BAREM CORECTARE Mecanică III

Soluție:

a) Forța de tracțiune este $F_t \leq \mu \frac{mg}{2} = 4,0 \text{ kN.}$	2x0,2 +0,1
Accelerația maximă este $a_{max} = \frac{F_{t,max}}{m} = \frac{\mu g}{2} = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$	2x0,2 +0,1
Viteza până la care ajunge autoturismul cu această accelerație este $v_1 = \frac{P_{max}}{F_{t,max}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$	0,2+0,1
Cum această viteză este inferioară celei din enunț, înseamnă că accelerarea are două etape: de la $v = 0$ până la $v = v_1$ accelerarea se face cu a_{max}; de la $v = v_1$ până la $v = v_0$ accelerarea se face păstrând P_{max}.	0,2 0,2
Timpul necesar pentru atingerea vitezei v_1 cu accelerație constantă este $\tau_1 = \frac{v_1}{a_{max}} = \frac{4P_{max}}{\mu^2 mg^2} = 4,5 \text{ s,}$	2x0,2 +0,1
Timpul necesar pentru atingerea vitezei v_0 de la v_1 este $\tau_2 = \frac{\Delta E_c}{P_{max}} = \frac{m}{2P_{max}}(v_0^2 - v_1^2) = 0,53 \text{ s,}$	2x0,2 +0,1
așa încât $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = 5,0 \text{ s.}$	0,2+0,1
b) Ecuația care descrie profilul podului este $y(x) = \frac{4h}{D^2} x(D - x).$	0,4
Timpul necesar pentru parcurgerea podului este $\tau = \int_0^L \frac{ds}{v} = \frac{1}{v} \int_0^D \sqrt{1 + y'^2} dx,$	2x0,2
unde $y' = \frac{4h}{D^2} (D - 2x).$	0,1
Așadar $\tau = \frac{1}{v} \int_0^D \sqrt{1 + \left[\frac{4h}{D^2} (D - 2x) \right]^2} dx$	0,2
Cu schimbarea de variabilă $q = \frac{4h}{D^2} (D - 2x),$	0,1 0,1

$dq = -\frac{8h}{D^2} dx,$	
timpul cerut devine $\tau = -\frac{D^2}{8hv} \int_{\frac{4h}{D}}^{-\frac{4h}{D}} \sqrt{1+q^2} dq = \frac{D^2}{4hv} \int_0^{\frac{4h}{D}} \sqrt{1+q^2} dq,$	2x0,2
adică $\tau = \frac{D^2}{8hv} \left[\ln \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4h}{D}\right)^2} + \frac{4h}{D} \right) + \frac{4h}{D} \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{D}\right)^2} \right].$	0,2
Valoarea numerică a timpului de traversare este $\tau = 5,03 \text{ s} \cong 5,0 \text{ s}.$	0,1

c) Ecuația de mișcare pe direcția normală se scrie $ma_n = mg \cos \alpha - N,$	0,4
unde $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{8hv^2}{D^2} \cos^3 \alpha,$	2x0,2
iar $y' = \tan \alpha$	0,2
și $y'' = -\frac{8h}{D^2}.$	0,2
Prin urmare $N(\alpha) = mg \cos \alpha \left(1 - \frac{8hv^2}{D^2 g} \cos^2 \alpha \right).$	0,2
La mijlocul podului $\alpha = 0,$	0,1
așa încât $N(0) = mg \left(1 - \frac{8hv^2}{D^2 g} \right),$	0,2
având valoarea numerică $N(0) = 8,4 \text{ kN}.$	0,1

d) Forța de tracțiune este $F_t = mg \sin \alpha.$	0,2
Lucrul mecanic elementar efectuat de forța de tracțiune este $d\mathcal{L} = F_t ds = mg \frac{dy}{ds} ds = mg dy,$	3x0,2
așa încât	0,2

$\mathcal{L} = mgh,$	
având valoarea numerică $\mathcal{L} = 50 \text{ kJ}.$	0,1
e) Puterea dezvoltată de forța motoare este $P = F_t v = mgv \sin \alpha.$	2x0,2
Valoarea maximă a puterii se realizează la intrarea pe pod, unde $\operatorname{tg} \alpha = y'(0) = \frac{4h}{D},$	0,2
așa încât $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4h}{\sqrt{D^2 + 16h^2}},$	0,2
de unde $P_{\max} = \frac{4mgvh}{\sqrt{D^2 + 16h^2}},$	0,2
având valoarea numerică $P_{\max} = 39,2 \text{ kW} \cong 39 \text{ kW}.$	0,1