



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 1 din 8

Subiectul I (10 puncte)

1. (4p)

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \text{ și } \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Conservarea momentului cinetic $L = mr^2\dot{\theta} = mC$ unde $C = r^2\dot{\theta}$ este constant. (1p)

Unghiul α dintre viteză și vectorul de poziție se scrie:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rv} = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}}. \text{ Ridicăm la pătrat și după calcule obținem (1p)}$$

$$(\sin^2 \alpha) \dot{r}^2 = \cos^2 \alpha \frac{C^2}{r^2}. \quad (1)$$

Derivăm în raport cu timpul și avem:

$$\ddot{r} \sin^2 \alpha = -\cos^2 \alpha \frac{C^2}{r^3} \quad (1p)$$

Din legea a doua a dinamicii proiectată pe $\vec{e}_r$ (forța e radială):

$$f = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) \text{ de unde}$$

$$f = -m\left(\frac{C}{\sin \alpha}\right)^2 \frac{1}{r^3} \quad (\text{cu } L/m \text{ în loc de } C) \quad (1p)$$

Variantă:

Din conservarea momentului cinetic: $L = mrv \sin \alpha$ rezultă $\sin \alpha = \frac{C}{rv} \dots$

2. (3.5p)

Din ecuația (1) avem:

$$r\dot{r} = \text{const} = r_0\dot{r}_0.$$

$$\text{Pe de altă parte: } \frac{d(r^2)}{dt} = 2r\dot{r} = 2r_0\dot{r}_0 \text{ de unde } r^2 = 2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2 \text{ și}$$

$$r(t) = \sqrt{2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2} \quad (2) \quad (1.5p)$$

Din conservarea momentului cinetic:

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 2 din 8

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2} = \frac{C\dot{r}_0^2}{\frac{2\dot{r}_0}{r_0}t + 1}$$

De unde

$$\theta(t) = \frac{C}{2r_0\dot{r}_0} \ln\left(\frac{2\dot{r}_0}{r_0}t + 1\right) \quad (3) \quad (1p)$$

Eliminând timpul între (2) și (3) obținem:

$$r = r_0 \exp\left(\frac{r_0\dot{r}_0}{C}\theta\right) \quad (0.5p)$$

Dacă $\dot{r}_0 = 0$ traiectoria este un cerc. (0.25p)

Dacă $\dot{r}_0 \neq 0$ traiectoria este o spirală. (0.25p)

3.(1.5p)

Energia particulei este

$$E = \frac{mv^2}{2} - m\left(\frac{C}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{1}{2r^2} + ct. \quad (1p)$$

Am arătat că $v = \frac{C}{r\sin\alpha}$. Înlocuim în expresia de mai sus și obținem $E = ct.$ (forța e conservativă). (0.5p)

Barem propus de:

Prof. Univ. Dr. Daniel ANDREICA

Facultatea de Fizică, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 3 din 8

Subiectul II (10 puncte)

a) (3 puncte) Legea conservării energiei sistemului se scrie (u este viteza suportului, iar v a corpului)		
	$0 = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - mgl\cos\alpha,$	0,2 p
iar cea a conservării impulsului pe direcția orizontală (pe care rezultanta forțelor este nulă)		
	$0 = Mu + mv_x.$	0,2 p
Deoarece	$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u},$	0,2 p
unde	$\vec{v}_r = -v_r\cos\alpha\hat{x} + v_r\sin\alpha\hat{y},$	0,2 p
	$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$	0,2 p
și		
	$\vec{u} = u\hat{x},$	0,2 p
atunci		
	$v_x = u - v_r\cos\alpha$	0,2 p
și		
	$v_y = v_r\sin\alpha.$	0,2 p
Cum		
	$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$	0,2 p
atunci		
	$v^2 = u^2 + v_r^2 - 2uv_r\cos\alpha.$	0,2 p
Prin urmare, ecuațiile care exprimă cele două legi de conservare se scriu:		
	$2mgl\cos\alpha = (m + M)u^2 + m(v_r^2 - 2uv_r\cos\alpha)$	0,2 p
și		
	$(m + M)u = mv_r\cos\alpha.$	0,2 p
Aceste două ecuații formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute, cu soluția		
	$u = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gl\cos\alpha}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(1+\frac{m}{M}\sin^2\alpha\right)}} \cos\alpha$	0,2 p
și		
	$v_r = \sqrt{\frac{2gl\left(1+\frac{m}{M}\right)\cos\alpha}{1+\frac{m}{M}\sin^2\alpha}}.$	0,2 p

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 4 din 8

Prin urmare,	$v = \sqrt{u^2 + v_r^2 - 2uv_r \cos \alpha} = \frac{v_r}{1 + \frac{m}{M}} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \sin^2 \alpha}.$	0,2 p
b) (2 puncte) Din ecuația de mișcare a corpului punctiform față de tijă, scrisă pe direcția firului	$\frac{mv_r^2}{l} = T - mg \cos \alpha + ma_0 \sin \alpha,$	0,5 p
unde accelerația suportului este dată de	$Ma_0 = T \sin \alpha,$	0,5 p
rezultă	$T = mg \frac{\left(3 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha + 2 \frac{m}{M}\right)}{\left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha\right)^2} \cos \alpha = mg \left[\frac{1}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha} + \frac{2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{\left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha\right)^2} \right] \cos \alpha.$	0,5 p
Se observă că T crește monoton când α scade de la 90° la 0° , unde atinge valoarea maximă	$T_{\max} = T(0^\circ) = mg \left(3 + 2 \frac{m}{M}\right).$	0,25 p 0,25 p
c) (2 puncte) Când $M \rightarrow 0$, tensiunea din fir este nulă! Explicație:		
- din conservarea componentei orizontale a impulsului sistemului rezultă că $v_x = 0$, adică micul corp se mișcă pe verticală, ca și centrul de masă al sistemului;		0,3 p
- din conservarea energiei rezultă că	$v = v_y = \sqrt{2gl \cos \alpha},$	0,3 p
iar	$v_r = \frac{v}{\sin \alpha}$	0,3 p
și	$u = v_r \cos \alpha = v \operatorname{ctg} \alpha.$	0,3 p
Din ecuația de mișcare pentru suport, rezultă	$T = 0,$	0,4 p
iar accelerația suportului este	$a_0 = g \operatorname{ctg} \alpha \left(1 + \frac{2}{\sin^2 \alpha}\right).$	0,4 p
d) (2 puncte) Echilibrul suportului este descris de ecuația	$T \sin \alpha = F_f.$	0,2 p
Ecuația de mișcare a corpului, scrisă pe direcția firului este	$\frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \alpha,$	0,3 p
unde	$v^2 = 2gl \cos \alpha,$	0,3 p
din conservarea energiei.		
Prin urmare	$T = 3mg \cos \alpha.$	0,2 p

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 5 din 8

Deoarece	$F_f \leq \mu N,$	0,2 p
unde	$N = Mg + T \cos \alpha,$	0,2 p
atunci	$\mu \geq \frac{3mg \sin \alpha \cos \alpha}{Mg + 3mg \cos^2 \alpha}.$	0,2 p
Valoarea minimă a funcției din membrul drept al inegalității de mai sus este	$\mu_{\min} = \frac{3m}{2M} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3m}{M}}}$	0,2 p
și se realizează pentru	$\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{3m}{M}}.$	0,2 p

Barem propuse de:

Conf. Univ. Dr. Sebastian POPESCU

Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 6 din 8

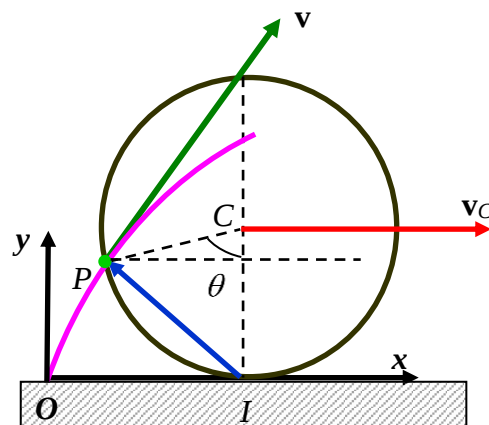
Subiectul III (10 puncte)

A1) (1 punct)

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta)$$

$$OI = v_C t = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{v_C t}{R}$$

$$x(t) = R\left(\frac{v_C t}{R} - \sin \frac{v_C t}{R}\right), \quad y(t) = R\left(1 - \cos \frac{v_C t}{R}\right)$$



A2) (1 punct)

$$v_x = \dot{x} = R\dot{\theta}(1 - \cos \theta) = v_C(1 - \cos \frac{v_C t}{R}),$$

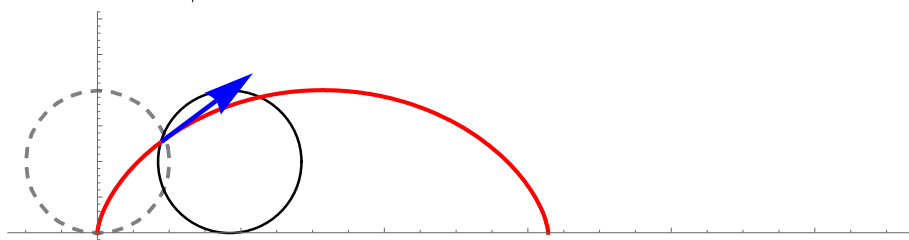
$$v_y = \dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = v_C \sin \frac{v_C t}{R}$$

$$v_p(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2v_C \left| \sin \frac{v_C t}{2R} \right|$$

A3) (1 punct)

Raportul componentelor vitezelor pe axele y și x într-un punct al traiectoriei este egal cu tangenta la traiectorie în punctul respectiv:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$



1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 7 din 8

B1) (3 puncte)

Înălțimea atinsă de P în SRI după desprinderea de roata se scrie

$$Y(\theta) = \frac{v_y^2(\theta)}{2g} + y(\theta) = R(1 - \cos \theta) + \frac{v_c^2}{2g} \sin^2 \theta$$

Valoarea maximă a lui $Y(\theta)$ se obține pentru $\theta = \theta_d = \Theta_{\text{MAX}}$ din ecuația

$$\frac{d[Y(\theta)]}{d\theta} \equiv Y'(\theta) = 0, \text{ adică } R \sin \theta \left(1 + \frac{v_c^2}{Rg} \cos \theta \right) = 0 \dots\dots\dots (1,5p)$$

Deoarece $\cos \theta \in [-1, 1]$, soluția posibilă, $\cos \Theta_{\text{MAX}} = -Rg/v_c^2$, trebuie discutată. Pentru înălțimea maximă, luăm în discuție intervalul $\theta \in [0, \pi]$.

Obținem următorul grafic de variație:.....(1p)

θ	0	$\pi/2$	Θ_{MAX}	π
$Y(\theta)$	0	+	+	0
$Y'(\theta), \frac{v_c^2}{Rg} > 1$	0	+	0	0
		$\nearrow$	max	$\searrow$
$Y'(\theta), \frac{v_c^2}{Rg} \leq 1$	0	+	+	0
	$\nearrow$		$\nearrow$	$\nearrow$

Concluzia discuției după graficul de variație:.....(0,5p)

(i) dacă $\frac{v_c^2}{Rg} > 1$ se obține înălțimea maximă pentru unghiul de desprindere $\theta_d \equiv \Theta_{\text{MAX}} = \arccos(-Rg/v_c^2)$ aflat aflat în cadranul doi, $\Theta_{\text{MAX}} \in (\pi/2, \pi)$;

(ii) dacă $\frac{v_c^2}{Rg} \leq 1$ înălțimea maximă se obține pentru unghiul de desprindere $\theta_d = \pi$ (în punctul cel mai de sus al rotii).

B2) (1 punct)

$$h_{\text{max}} = Y(\Theta_{\text{MAX}}) = R \left(1 + \frac{Rg}{2v_c^2} + \frac{v_c^2}{2Rg} \right) > 2R \dots\dots\dots (0.5p)$$

$$(ii) \text{ dacă } v_c^2/(Rg) \leq 1 \Rightarrow h_{\text{max}} = 2R \text{ pentru } \theta_d = \pi \dots\dots\dots (0.5p)$$

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.



Concursul Național Studentesc de Fizică „Dragomir Hurmuzescu”
ediția a XI-a, etapa națională, Iași, 13 mai 2023
Bareme – anul I

pagina 8 din 8

B3) (2 puncte)

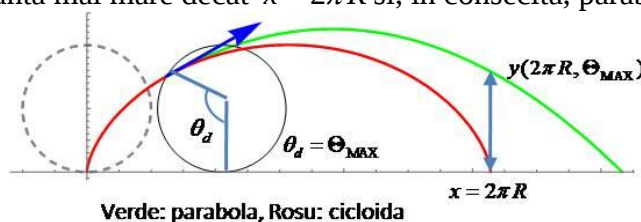
Ecuatia parabolei descrisa de particula P in SRI este

$$y(x, \theta) = y_p(\theta) + (x - x_p(\theta)) \frac{v_{py}(\theta)}{v_{px}(\theta)} - \frac{g(x - x_p(\theta))^2}{2v_{px}^2(\theta)} \dots\dots\dots(1.2p)$$

unde $x_p(\theta), y_p(\theta)$ sunt coordonatele punctului de desprindere aflat pe cicloida, $v_{px}(\theta) = v_C(1 - \cos \theta)$, $v_{py}(\theta)/v_{px}(\theta) = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$, cu θ unghiul de desprindere. Pentru cerinta problemei se face substitutia $\theta \rightarrow \Theta_{MAX} = \arccos(-Rg/v_0^2) = 2\pi/3$ si pentru $x = 2\pi R$ (rotatie completa, cu 2π , a rotii) se obtine

$$y(2\pi R, \Theta_{MAX}) \Big|_{R=1}^{\Theta_{MAX}=2\pi/3} \approx 1.58 > 0 \dots\dots\dots(0.3p)$$

Variantă de raspuns pentru graficul cerut: parabola descrisa de P va intersecta axa Ox la o distanta mai mare decat $x = 2\pi R$ si, in consecinta, parabola se situeaza 'deasupra' cicloidei.



.....(0.5p)

Barem propuse de:
Conf. Univ. Dr. Tiberius O. Cheche
Facultatea de Fizică, Universitatea din București

1. Fiecare dintre subiectele 1, 2, respectiv 3 se rezolvă pe o foaie separată care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, studentul are dreptul să rezolve cerințele în orice ordine.
3. Durata probei este de 3 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către studenți.
4. Studenții au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10. Punctajul final reprezintă suma acestora.