Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi

Facultatea de Fizică

AXIOMATICI DE ETALONARE ÎN TEORIILE GEOMETRO-DINAMICE ALE PRINCIPALELOR CÂMPURI FIZICE

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Univ. Dr. Ciprian Dariescu

Candidat
Drd. Ciprian Creţu

Iași –2015

Cuprinsul tezei

Introducere

Teza de doctorat cu titlul "*Axiomatici de etalonare in teoriile geometro-dinamice ale principalelor câmpuri fizice*" este structurată pe patru capitole. Fiecare capitol poate fi parcurs independent de celelalte, încheindu-se cu o secţiune de concluzii şi o listă bibliografică.

În capitolul I, intitulat "Elemente matematice fundamentale în teoriile de geometrizare și de câmp", am prezentat pe scurt noțiuni și rezultate de geometrie diferențială [1], grupate în secțiunea I.1. "Elemente de geometrie diferențială". Vectorii Killing sunt asociați cu simetriile spațiu-timpului, acestea fiind întotdeauna de o importanță fundamentală în fizică. În particular, simetria planară provine din unele soluții exacte ale ecuațiilor lui Einstein[2]. Metricile cu simetrie planară pot generaliza bine-cunoscutele geometrii Robertson-Walker [3] pentru spații cu extra-dimensiuni." Grupul izometriilor unei clase de metrici planar simetrice în coordonate izotrope" este titlul secțiunii I.2. și subiectul unei lucrări, susținute la conferința internațională TIM14 "Physics without frontiers".

In capitolul II, intitulat "Metrici Beil, geodezice și legatura cu electrodinamica" am studiat implicațiile acestui tip de metrici în teoriile de unificare a câmpurilor fizice. Modelele construite pe baza acestor metrici sunt spațiile Finsler. Teoria transformărilor gauge în spații Finsler se aplică în relativitatea generală [4]. Aceste transformări produc metrici noi, care corespund introducerii geometrodinamice de câmpuri fizice suplimentare. Ecuația geodezicei în spațiul transformat este echivalentă cu ecuația de mișcare [5] în spațiul inițial, unde câmpul suplimentar este inclus printr-un termen așa numit de forță. Un exemplu este dat de o transformare specială și de metrica rezultantă, în care, potențialul electromagnetic este legat mai degrabă de parametrii transformării gauge, decât de potențialul gauge tradițional. Adică, de fapt, câmpul electromagnetic corespunde unei conexiuni suplimentare pe varietatea de bază și nu doar unui termen simplu de curbură [6]. Elementele teoretice necesare studiului [7] menționat sunt grupate în secțiunea II.1., intitulată "Spații Finsler, spații Lagrange". "Electrodinamică dintr-o metrică Schwarzschild modificată" este titlul secțiunii II.2. și subiectul unei lucrări susținute la conferința internațională TIM13 "Physics without frontiers".

Proprietățile de simetrie ale particulelor elementare sunt studiate cu ajutorul grupurilor de simetrie externe sau spațiale (grupul Lorenz, grupul Poincare) și cu ajutorul grupurilor de simetrie interne (grupurile unitare $U(1), SU(2), SU(3), SU(n)$). Considerăm în continuare transformări ce nu schimbă coordonatele spațiu-timp, dar schimbă funcțiile de câmp. Asemenea transformări privesc proprietățile interne ale câmpurilor și particulelor, numindu-se din acest motiv transformări interne [8]. Acestea fac obiectul de studiu pentru capitolul III, intitulat "Geometrizarea de invarianță a etalonării simetriilor interne". Invarianța unui lagrangian pentru un grup de transformări globale nu se păstrează automat și pentru transformările locale ale aceluiași grup. Pentru a gasi un lagrangian care să satisfacă ambele condiții se introduc noi tipuri de câmpuri, așa numitele câmpuri de etalon (gauge), ce modifică lagrangianul în așa fel încât acesta să devină invariant și față de transformările locale (gauge) [8], situație prezentată în secțiunea III.1. „Grupuri interne de etalonare". Subiectul unei lucrări, publicate în Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi (2012), este prezentat în secţiunea III.2., intitulată „Teoria relativist U(1) gauge invariantă a scalarilor în câmpuri statice exterioare". Secţiunea III.3., cu titlul „Studiul analitic al fermionilor bazat pe funcţii Heun", prezintă subiectul unei lucrări publicate în Romanian Journal of Physics (2013).

În capitolul IV, intitulat "Simetrii externe în formulare local covariantă cu aplicații în extra-dimensiuni și cosmologie Schrödinger", aplicăm, în prima parte, noțiunile matematice introduse pînă acum la formularea teoriilor gauge. Mai întâi la cazul abelian, al ecuațiilor Maxwell, apoi la cazul geometriei gauge invariante [9]. În secțiunea IV.1., intitulată „Geometria de gauge invariantă”, expunem pe scurt noțiunile necesare. După apariția modelului Randall-Sundrum (RS), diferite scenarii braneworld au fost formulate pornind de la ideea ca Universul nostru, în care particulele modelului standard sunt prinse, este încorporat într-un hiperspațiu (bulk) de dimensiune mai mare [10]. Deoarece, în modelul RS, materia este practic exclusă din membrană, mecanisme de limitare au fost propuse, printre care cel mai familiar este cuplarea la un câmp scalar. Aspecte ale acestei problematici sunt abordate în a doua parte a capitolului IV, în secțiunea IV.2., intitulată „Principii de geometrizare în extra dimensiuni” [10]. Subiectul unei lucrări, publicate în International Journal of Theoretical Physics (2012), este prezentat în secțiunea IV.3., intitulată „Tratarea cuantică a Universului FRW deformat după a 5- a dimensiune în imagine Schrödinger”. Deasemenea, secțiunea IV.4., intitulată „Asupra unei ecuații Schrödinger cu potențial special dedus dintr-o metrică cosmologică 5-dimensională”, reprezintă conținutul unei lucrări publicate în Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, (2013).

Bibliografie selectivă introducere

[1] S. Kobayashi, Nomizu K., *Foundation of Differential Geometry*, Interscience Publ., (1969).

[2] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Berlin, Cambridge University Press, (1980).

[3] H.P. Robertson, *Relativity and Cosmology*, W.B. Saunders, London, (1968).

[4] S. Ikeda, *Adavanced Studies in Applied Geometry,* Seizansha, Sagamihara, Japan, (1995).

[5] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, (1999).

[6] R.G. Beil, *Electrodynamics from a metric*, Int. J.of Theor. Phys., Vol. 26, Issue 2, p. 189, (1987).

[7] R. Miron, M. Anastasiei, *The geometry of Lagrange spaces:Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ., FTPH, no.59, (1994).

[8] Gh. Zet, *Simetrii unitare și teorii gauge*, Ed. Gh. Asachi, Iași, (1998).

[9] M. Göckeler, T. Schücker, *Differential geometry, gauge theories, and gravity*, Cambridge, Cambridge University Press, (1987).

[10] L. Randall, R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett., Vol. 83, Issue 17, p. 3370, (1999).

CAPITOLUL I

Elemente matematice fundamentale în teoriile de geometrizare și de câmp

I.1. Elemente de geometrie diferențială

I.2. Grupul izometriilor unei clase de metrici planar simetrice în coordonate izotrope

Originile simetriei planare se află în unele soluții exacte ale ecuațiilor lui Einstein pentru obiecte astrofizice sau cosmologice relativ moderne [1], cum ar fi: pereți plani, cilindri goi sau corzi și diverse aspecte ale colapsului critic de simetrie non-sferică. În plus, astfel de metrici pot generaliza bine-cunoscutele geometrii Robertson-Walker pentru spații cu extra-dimensiuni [2]. Studiul sistemelor fizice simetrice dezvăluie simplitatea și repetiția unor fenomene. În cazul unui sistem extrem de simetric găsim ecuații relativ ușor de rezolvat cu soluții ce au proprietăți speciale. Într-o varietate riemanniană avem simetrie dacă deplasarea punctelor într-o anumită direcție nu schimbă distanțele între acestea. Impunând invarianța metricii pentru mișcările de translație infinitezimale [3]

$$\bar{x}^i = x^i + \delta x^i ,$$

în direcția câmpului vectorial X^i

$$\delta x^i = X^i d\lambda ,$$

avem următoarea relație

$$\delta(ds^2) = \delta\left(g_{ik} dx^i dx^k\right) = 0.$$

După calcule, obținem simetrie dacă sistemul de ecuații diferențiale

$$g_{ik,l} X^l + g_{kl} X^l_{,i} + g_{il} X^l_{,k} = 0$$

are soluție. Calculând derivata Lie a metricii g, în lungul câmpului vectorial $X = X^l \partial_l$, obținem

$$L_X g = L_X\left(g_{ik} dx^i dx^k\right) = (g_{ik,l} X^l + g_{lk} X^l_{,i} + g_{il} X^l_{,k}) dx^i dx^k.$$

Atunci X este numit câmp vectorial Killing relativ la g dacă

$$L_X g = 0,$$

unde $L_X(.)$ este derivata Lie, adică

$$(L_X g)_{ik} = g_{ik,l} X^l + g_{kl} X^l_{,i} + g_{il} X^l_{,k} , \text{ fiindcă } g_{kl} = g_{lk}. \tag{1}$$

Considerăm varietatea riemanniană M, dotată cu metrica simetrică planară

$$ds^2 = e^{2f(z,t)}(dx^2 + dy^2) + dz^2 - dt^2. \tag{2}$$

Efectuând substituțiile [4] de tip nul

$$u = \frac{t - z}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{t + z}{\sqrt{2}},$$

metrica poate fi scrisă

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^{2f(u,v)} \delta_{AB} dx^A dx^B - 2du dv, \tag{3}$$

unde $u = x^3,\ v = x^4,\ A, B = \overline{1,2}$.

În scopul de a determina câmpul vectorial Killing, vom începe cu derivata Lie (1), impunând condiția de izometrie [5]

$$g_{ik,l} X^l + g_{kl} X^l_{,i} + g_{il} X^l_{,k} = 0,\ i, k = \overline{1,4} . \tag{4}$$

Astfel, în final, pentru metrica analizată am obținut generatorii Killing $\widehat{K}_1, \dots, \widehat{K}_6$, de forma

$$\widehat{K}_1 = \partial_x, \quad Z_0^1, \quad \widehat{K}_2 = \partial_y, \quad Z_0^2, \quad \widehat{K}_3 = y\partial_x - x\partial_y, \quad \omega,$$
$$\widehat{K}_4 = \partial_v, \quad A_0^4, \quad \widehat{K}_5 = U\partial_x + x\partial_v, \quad \widehat{K}_6 = U\partial_y + y\partial_v,$$

Aceștia corespund câmpului vectorial Killing general [5]

$$\vec{X} = Z_0^1\partial_x + \omega y\partial_x + A_1^4 U\partial_x + Z_0^2\partial_y - \omega x\partial_y + A_2^4 V\partial_y + A_1^4 x\partial_v + A_2^4 y\partial_v + A_0^4\partial_v$$

și transformărilor infinitezimale exprimate prin relațiile

$$\frac{dx}{d\mu} = U, \quad \frac{dv}{d\mu} = x, \quad \frac{dy}{d\mu} = V, \quad \frac{dv}{d\mu} = y,$$
$$\frac{dx}{dv} = \frac{U}{x}, \quad U \sim x^2, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{V}{y}, \quad V \sim y^2 .$$

Concluzii capitolul I

Originile simetriei planare se află în unele soluții exacte ale ecuațiilor lui Einstein pentru obiecte astrofizice sau cosmologice relativ moderne, cum ar fi: pereți plani, cilindri goi sau corzi și diverse aspecte ale colapsului critic de simetrie non-sferică. În plus, astfel de metrici pot generaliza bine-cunoscutele geometrii Robertson-Walker pentru spații cu extra-dimensiuni.

Pornind de la o clasă de metrici planar simetrice în coordonate izotrope am obținut vectorii Killing. Folosind o schimbare de coordonate adecvată, am calculat derivata Lie a metricii

$$ds^2 = e^{2f(z,t)}(dx^2 + dy^2) + dz^2 - dt^2 .$$

Respectând condițiile de integrabilitate am rezolvat ecuațiile Killing corespunzătoare. Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [6].

Bibliografie selectivă capitolul I

[1] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations*, Berlin, Cambridge University Press, (1980).

[2] H.P. Robertson, *Relativity and Cosmology*, W.B. Saunders, London, (1968).

[3] H. Stephani, *General Relativity. An introduction to the theory of the gravitational field*, Cambridge University Press, Cambridge, (1982).

[4] C. Dariescu, *Planary Symmetric Static Worlds with Massless Scalar Source*, Foundations of Physics, Vol. 26, No. 8, p. 1069, (1996).

[5] I.Aștefănoaei, C.Dariescu, M.A.Dariescu, *Modele speciale de Univers și patologii spațio-temporale*, Ed.Univ. "Al.I.Cuza" Iasi (2007).

[6] C. Crețu, C. Dariescu, *On the Isometry Group for a Class of Planary Symmetric Metrics in Null-coordinate Formulation* , TIM14 Physics Conference, Univ. de Vest, Timișoara, (2014).

CAPITOLUL II

Metrici Beil, geodezice și legătura cu electrodinamica

II. 1. Spații Finsler, spații Lagrange

II.2. Electrodinamică dintr-o metrică Schwarzschild modificată

Fie un spațiu Minkowski [1] în care o particulă încărcată se mișcă în prezența unui câmp electromagnetic. Mișcarea este descrisă de ecuațiile Lorenz [2]. R.G. Beil propune o modificare a metricii spațiului astfel încât ecuațiile Lorentz să devină ecuații ale geodezicelor în noua metrică [3]. Atunci forța electromagnetică rezultă din noua geometrie a spațiului. Reluăm ideile principale și rezultatele din articolul lui R.G. Beil [3], folosind notațiile sale. Considerăm un spațiu Minkowski [1]

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \, , \tag{1}$$

unde signatura metricii este (+1,-1,-1,-1). Parametrul traiectoriei este timpul propriu τ, poziția particulei este dată de $x^\mu(\tau)$, iar viteza și accelerația sunt
$v^\mu = dx^\mu/d\tau$ și $a^\mu = dv^\mu/d\tau$.
Particula este acționată de un câmp electromagnetic de potențial $A_\mu(x)$ și ecuația de mișcare (ecuația Lorentz) [2] este

$$a^\mu = e(mc)^{-1} \eta^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} v^\lambda \tag{2}$$

unde $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ este tensorul electromagnetic. Traiectoria descrisă de această ecuație nu este o geodezică în spațiul Minkowski. Referitor la particulă, noua metrică produce o schimbare de scală a timpului, un nou parametru al traiectoriei, $\bar{\tau}$, astfel încât

$$c^2 d\bar{\tau}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{3}$$

În noul spațiu, viteza și accelerația sunt $\bar{v}^\mu = dx^\mu/d\bar{\tau} = (dx^\mu/d\tau)b$ și
$\bar{a}^\mu = d\bar{v}^\mu/d\bar{\tau} = b^2 a^\mu + v^\mu(db/d\bar{\tau})$. Funcția scală este considerată $b = d\tau/d\bar{\tau}$.

Ideea de bază constă în presupunerea că forma metricii $\bar{g}_{\mu\nu}$ este

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + k B_\mu B_\nu \, , \tag{4}$$

unde k este o constantă de determinat și vectorul B_μ este legat de potențialul electromagnetic A_μ. Înlocuind (4) în (3), obținem

$$c^2 d\bar{\tau}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \bar{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu d\tau^2 = \left[c^2 + k\left(B_\mu v^\mu\right)^2\right] d\tau^2,$$

de unde

$$b = \left[1 + kc^{-2}\left(B_\mu v^\mu\right)^2\right]^{-1/2} . \tag{5}$$

Observăm, din relația (5), că b depinde de punct și de viteză.

Ecuația geodezicei în noua metrică [3] este $\bar{a}^\mu + \bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \bar{v}^\alpha \bar{v}^\beta = 0$
sau, după calculul simbolurilor Christoffel,

$$a^\mu + kb^2 \left[B^\mu - \frac{v^\mu}{c^2}(B_\alpha v^\alpha)\right] d(B_\alpha v^\alpha)/d\tau + k\eta^{\mu\lambda} H_{\beta\lambda}(B_\alpha v^\alpha) v^\beta = 0, \tag{6}$$

unde $H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}$. Comparând ecuația (6) cu ecuația Lorentz (2) obținem coincidența lor, doar dacă vectorul B_μ este legat de potențialul electromagnetic A_μ printr-o transformare gauge de forma

$$B_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} \tag{7}$$

și are loc relația

$$k(B_\alpha v^\alpha) = -e(mc)^{-1}. \tag{8}$$

În aceste condiții obținem și $H_{\mu\nu} = F_{\mu,\nu}$. Identificarea lui k urmează studierii ecuațiilor de câmp. Aplicăm metoda lui R. G. Beil [3] la situația în care metrica Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ este înlocuită cu metrica Schwarzschild.

Cazul metricii Schwarzschild

Considerăm, în loc de o metrică plată $\eta_{\mu\nu}$, o metrică gravitațională Schwarzschild $g_{\alpha\beta}$. Expresia metricii Schwarzschild cu simetrie spațială statică [4] este

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{9}$$

unde r_g este raza gravitațională și $x^0 = ct$.

Ecuația Lorentz a mișcării particulei în spațiul de metrică $g_{\alpha\beta}$ și potential A_μ este

$$a^\mu = e(mc)^{-1} g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} v^\lambda \tag{5}$$

unde $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Transformăm $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + kB_\alpha B_\beta$ în coordonate sferice și obținem

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - r_g/r + kB_0^2 & kB_0B_1 & kB_0B_2 & kB_0B_3 \\ kB_1B_0 & -(1 - r_g/r)^{-1} + kB_1^2 & kB_1B_2 & kB_1B_3 \\ kB_2B_0 & kB_2B_1 & -r^2 + kB_2^2 & kB_2B_3 \\ kB_3B_0 & kB_3B_1 & kB_3B_2 & -r^2 sin^2\theta + kB_3^2 \end{pmatrix}.$$

Considerând $B = (B_0(r), 0,0,0)$, avem

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - r_g/r + kB_0^2(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - r_g/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Folosind tehnica din [3] se obține următoarea ecuație a geodezicei

$$a^\mu + kb^2\left[B^\mu - \frac{v^\mu}{c^2}(B_\alpha v^\alpha)\right] d(B_\alpha v^\alpha)/d\tau + kg^{\mu\lambda} H_{\beta\lambda}(B_\alpha v^\alpha) v^\beta = 0 \tag{6}$$

unde $H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}$. Are loc coincidența ecuației geodezicei cu ecuația Lorentz, doar dacă vectorul B_μ este legat de potențialul electromagnetic A_μ printr-o transformare gauge de forma

$$B_\mu = A_\mu + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} \tag{7}$$

și are loc relația

$$k(B_\alpha v^\alpha) = -e(mc)^{-1}. \tag{8}$$

Dependența de punct (x) și viteză (v) a factorului de scală b se transmite la vectorul B_μ și mai departe la metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Fiind dependentă de punct și viteză, $\bar{g}_{\mu\nu}(x, v)$ este o metrică Lagrange generalizată [5].

Metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ se reduce la o metrică Finsler dacă este 0-omogenă în λ, condiție care se reduce la egalitatea $B_\mu(x, \lambda v) = B_\mu(x, v)$. În acest caz obținem funcția Finsler de forma

$$F(x^\mu, v^\mu) = (\bar{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)^{1/2}.$$

În continuare, metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ se poate reduce la o metrică riemanniană dacă B_μ este funcție numai de punctual x. Identificarea lui k urmează studierii ecuațiilor de câmp [2].

Componentele nenule ale tensorului Ricci pentru metrica $\bar{g}_{\alpha\beta}$ sunt:

$$R_{11} = -k\left[4r^3\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}\left(-8r^3B_0B_0''r_g + 4r^2B_0B_0''r_g^2 - 4r^3kB_0^3B_0''r_g - 18r^2r_gB_0B_0'\right)$$
$$-k\left[4r^3\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}\left(10rr_g^2B_0B_0' - 6r^2r_gkB_0^3B_0' + 4r^4B_0'^2 + 8r^3B_0B_0' + r_g^2B_0^2\right)$$
$$-k\left[4r^3\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}\left(8kr^3B_0^3B_0' - 8r^3B_0'^2r_g + 4r^2r_g^2B_0'^2 + 4r^2B_0'B_0'' + 4kr^4B_0^3B_0''\right),$$

$$R_{22} = \left[4r\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\left(r - r_g\right)\right]^{-1}\left(-8kr^3B_0B_0''r_g + 4r^2B_0B_0''r_g^2 - 4r^3kB_0^3B_0''r_g - 2r^2r_gB_0B_0'\right) +$$
$$+\left[4r\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\left(r - r_g\right)\right]^{-1}\left(2rr_g^2B_0B_0' + 2r^2r_gkB_0^3B_0' + 4r^4B_0'^2 - 8r^3r_gB_0'^2 + 4r^4B_0B_0''\right) +$$
$$+\left[4r\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\left(r - r_g\right)\right]^{-1}\left(4r^4B_0'^2 + 4kr^4B_0^3B_0'' + 4rr_gB_0^2 - 3r_g^2B_0^2 + 4krr_gB_0^4\right),$$

$$R_{33} = \left[2\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}\left(2r^2B_0' - 2rr_gB_0' - r_gB_0\right)kB_0,$$

$$R_{44}=\left[2\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}sin^2\theta\; kB_0\left(2r^2B_0' - 2rr_gB_0' - r_gB_0\right),$$

unde $B_0' = dB_0/dr$ și $B_0'' = d^2B_0/dr^2$.

Scalarul de curbură $R = \bar{g}^{\nu\mu}R_{\nu\mu}$ este

$$R = -k\left[2r^2\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(-8r^3B_0B_0''r_g + 4r^2B_0B_0''r_g^2 - 4r^3kB_0^3B_0''r_g - 18r^2r_gB_0B_0'\right)$$
$$-k\left[2r^2\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(10rr_g^2B_0B_0' - 6r^2r_gkB_0^3B_0' + 4r^4B_0'^2 + 8r^3B_0B_0' + r_g^2B_0^2\right) -$$
$$-k\left[2r^2\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(8kr^3B_0^3B_0' - 8r^3B_0'^2r_g + 4r^2r_g^2B_0'^2 + 4r^2B_0'B_0'' + 4kr^4B_0^3B_0''\right).$$

Componentele nenule ale tensorului Einstein, $G_{\nu\mu} = R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\nu\mu}R$ sunt:

$$G_{22} = -kB_0\left[r\left(r - r_g\right)\left(r - r_g + krB_0^2\right)\right]^{-1}\left(2r^2B_0' - 2r_gB_0'r - r_gB_0\right),$$

$$G_{33} = -k\left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(4B_0B_0'r^3 - 10r_gB_0B_0'r^2 + 4kB_0^3B_0'r^3 + 6rr_g^2B_0B_0'\right)$$
$$-k\left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(-2kr_gB_0^3B_0'r^2 + 2rr_gB_0^2 - r_g^2B_0^2 + 2kr_gB_0^4 - 8r^3r_gB_0B_0''\right)$$
$$-k\left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(4r^2B_0B_0''r_g^2 - 4kr^3r_gB_0^3B_0'' + 4r^4B_0'' - 8r^3r_gB_0'^2 + 4r^2r_g^2B_0'^2\right)$$
$$-k\left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1}\left(4r^4B_0B_0'' + 4kr^4B_0^3B_0''\right),$$

$$G_{44} = -k\, sin^2\theta \left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1} \left(4B_0B_0'r^3 - 10r_gB_0B_0'r^2 + 4kB_0^3B_0'r^3 + 6rr_g^2B_0B_0'\right)$$
$$-k\, sin^2\theta \left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1} \left(-2kr_gB_0^3B_0'r^2 + 2rr_gB_0^2 - 2rr_gB_0^2 - r_g^2B_0^2 + 2krr_gB_0^4\right)$$
$$-k\, sin^2\theta \left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1} \left(4r^2B_0B_0''r_g^2 - 4kr^3r_gB_0^3B_0'' + 4r^4B_0'^2 - 8r^3r_gB_0'^2\right)$$
$$-k\, sin^2\theta \left[4\left(r - r_g + krB_0^2\right)^2\right]^{-1} \left(4r^2r_g^2B_0'^2 + 4r^4B_0B_0'' + 4kr^4B_0^3B_0''\right).$$

Ecuațiile de camp, pentru particula în câmpul electromagnetic de potential $A_\mu(x)$, devin [5]

$$G_{\eta\gamma} = 8\pi\kappa c^{-4}\left(\rho_0\bar{v}_\eta\bar{v}_\gamma + \bar{T}_{\eta\gamma}\right),$$

unde κ este constanta gravitațională și ρ_0 densitatea corespunzătoare materiei. În conformitate cu [3], pentru $k = 4\kappa c^{-4}$, tensorul energie electromagnetică $\bar{T}_{\eta\gamma}$ este parte a tensorului Einstein, adică provine din metrica $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

Concluzii capitolul II

În secțiunea II.2., pornind de o idee a lui R. G. Beil, modificăm metrica spațiului Minkowski în care o particulă încărcată se mișcă conform ecuației Lorentz. Modificarea este de așa natură încât, cu noua metrica și în noul spațiu, particula se deplasează pe o geodezică. O nouă metrică este obținută din metrica inițială printr-o transformare gauge. Dependența de punct (x) și viteză (v) a factorului de scală b se transmite la vectorul B_μ și mai departe la metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Fiind dependentă de punct și viteză, $\bar{g}_{\mu\nu}(x,v)$ este o metrică Lagrange generalizată.

Metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ se reduce la o metrică Finsler dacă este 0-omogenă în λ, condiție care se reduce la egalitatea $B_\mu(x,\lambda v) = B_\mu(x,v)$. În acest caz obținem funcția Finsler de forma

$$F(x^\mu, v^\mu) = (\bar{g}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu)^{1/2}.$$

În continuare, metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ se poate reduce la o metrică riemanniană, dacă B_μ este funcție numai de punctul x. Tensorul energie electromagnetică $\bar{T}_{\eta\gamma}$ este parte a tensorului Einstein, deci provine din metrica $\bar{g}_{\alpha\beta}$.

Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [6].

Bibliografie selectivă capitolul II

[1] S. Ikeda, *Adavanced Studies in Applied Geometry*, Seizansha, Sagamihara, Japan, (1995).

[2] A.O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Dover Publications, New York, (1980).

[3] R. G. Beil, *Electrodynamics from a metric*, Int. J.of Theor. Phys.,Vol. 26, Issue 2, p. 189, (1987).

[4] Gh. Munteanu, V. Balan, *Lectii de teoria relativitatii*, Editura Brena, Bucuresti (2000).

[5] R. Miron, M. Anastasiei, *The geometry of Lagrange spaces:Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publ., FTPH, no. 59, (1994).

[6] C. Crețu, *Electrodynamics from modified Schwarzschild metric* , TIM13 Physics Conference, Univ. de Vest, Timișoara, (2013).

CAPITOLUL III

Geometrizarea de invarianță a etalonării simetriilor interne

III. 1. Grupuri interne de etalonare

III.2. Teoria relativist U(1)-gauge invariantă a scalarilor în câmpuri statice exterioare

Descoperirea efectelor cuantice Hall, atât întregi cât și fracționare [1], a deschis un nou domeniu de investigații, în fizica evoluției 2-dimensionale a bosonilor si fermionilor. În cazul efectului cuantic întreg Hall (IQHE), conductivitatea cuantificată pare a fi multiplicitatea unui număr întreg de q^2/h; o simplă combinație de constante fundamentale.

Acest efect nu depinde de parametrii specifici materialului, fiind legat de nivelurile de energie Landau și caracterizând electronii ce evoluează în câmpuri magnetice. Este important să adăugam, totuși, că impuritățile și condițiile la limită, care elimină degenerarea nivelurilor Landau, joacă un rol vital în efectul cuantic Hall [1].

Pe de altă parte, așa-numitul efect Hall cuantic fracționar (FQHE) este un exemplu de fizică nouă care a apărut în ultimii ani, ca rezultat al cercetării active în domeniul purtătorilor limitați cuantic din heterostructuri semiconductoare [2]. Acest efect (FQHE) a fost observat pentru prima dată într-o probă GaAs-(AlGa)As de mare mobilitate, bidimensională, dopată modular, preparată prin epitaxie cu fascicul molecular [3].

Prezența unui camp magnetic, perpendicular pe un sistem bidimensional de electroni, cuantifică purtătorii într-un plan de mișcare și transformă spectrul lor de energie într-un set de niveluri distincte, extrem degenerate[4].

Cu descoperirea noului material numit grafen, s-a constatat că purtătorii de sarcina sunt mai bine descriși de ecuațiile de câmp relativiste [5].

În continuare, urmărim să dezvoltăm o analiză cuantică a bosonilor relativiști, supuși unei configurații statice de câmpuri magnetice și electrice ortogonale, la temperatură finită.

Ecuația Klein-Gordon

În coordonatele carteziene uzuale

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2,$$

bosonul relativist complex, încărcat, de masă m_0, ce evoluează într-un câmp magnetic static ortogonal pe un câmp electric static [6] este descris de bine cunoscuta densitate de lagrangian $U(1)$- gauge invariantă

$$\boldsymbol{L} = \eta^{ij}(D_i\psi)^* D_j\psi + m_0^2\psi^*\psi \,, \tag{1}$$

unde *D* reprezintă derivata $U(1)$- gauge covariantă,

$$D_i\psi = \psi_{,i} - \frac{\mathrm{i}q}{\hbar}A_i\psi, \quad D_i\psi^* = \psi^*{}_{,i} + \frac{\mathrm{i}q}{\hbar}A_i\psi^* .$$

Folosim etalonarea (gauge) convenabilă,

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = B_0 x, \quad A_4 = \frac{E_0}{c} x,$$

unde E_0 și B_0 sunt câmpurile ortogonale electric și magnetic.

Prin folosirea metodei obișnuite [6], ajungem la ecuația Euler-Lagrange corespunzătoare,

$$\eta^{ij} D_i D_j \psi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0, \tag{2}$$

a cărei formă explicită este

$$\eta^{ij} \psi_{,ij} - 2\mathrm{i} \frac{q}{\hbar} B_0 x \psi_{,y} + 2\mathrm{i} \frac{q}{\hbar c^2} E_0 x \psi_{,t}$$
$$- \left[\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{q^2 x^2}{\hbar^2} \left(B_0^2 - \frac{E_0^2}{c^2} \right) \right] \psi = 0 \,, \tag{3}$$

unde $\hbar$ și c au fost introduse în vederea unei mai bune comparații între predicțiile teoretice și datele experimentale.

Astfel, punând totul împreună, funcția de undă (4) capătă forma [7] explicită

$$\psi = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2} + \frac{i}{\hbar}(py + p_z z - wt)\right] H_n(\rho) \tag{12}$$

de îndată ce impunem condiția

$$\left[\frac{(wB_0 + pE_0)^2}{c^2 \beta^2} - p_z^2 - m_0^2 c^2 \right] = (2n+1) q \beta \hbar,$$

ceea ce conduce la relația de cuantificare a energiei

$$w_n = -p \frac{E_0}{B_0} \pm \frac{\beta}{B_0} m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p_z^2}{m_0^2 c^2} + (2n+1) \frac{q\hbar\beta}{m_0^2 c^2}} \;. \tag{13}$$

În cazul unui număr infinit de nivele de energie, $N \longrightarrow \infty$, același spectru de energetic (21), cu notațiile (22), conduce la funcția clasică de partiție

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_n) = \frac{\exp\left[-\beta\left(a - \frac{\Omega}{2}\right)\right]}{2\sinh \frac{\beta\,\Omega}{2}} \,. \tag{30}$$

Funcția caracteristică (24) , cu semnificația de energie liberă, devine

$$F = \frac{p_z^2}{2m_0} - p \frac{E_0}{B_0} + kT \ln\left[2\sinh \frac{\beta\,\Omega}{2}\right], \tag{31}$$

conducând la următoarea magnetizație negativă

$$M \equiv -\frac{\partial F}{\partial B_0} = -\left[\mu_{BP} \coth \frac{\beta\Omega}{2} + p \frac{E_0}{B_0^2} \right], \tag{32}$$

care conține, pe lângă obișnuitul termen *coth* înmulțit cu magnetonul Bohr-Procopiu [8], o contribuție suplimentară de tip Hall. În scopul de a pune rezultatele principale într-o formă mai simplă, vom introduce variabila fară dimensiune

$$x = \frac{\Omega}{2kT} \cdot \tag{33}$$

Energia provenită din funcția de partiție (30) este

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{p_z^2}{2m_0} - p\frac{E_0}{B_0} + kT\, x \coth x, \tag{34}$$

permițându-ne să calculăm capacitatea calorică,

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = k\frac{x^2}{\sinh^2 x}. \tag{35}$$

III. 3. Studiul analitic al fermionilor bazat pe funcții Heun

Prin "graphene", se înțelege în general o structură planară de atomi de carbon, dispuși în celule hexagonale. Pseudo-particulele corespunzătoare sunt de energie redusă, lipsite de masă, chirale și au, în principiu, o viteză Fermi de 300 ori mai mică decât viteza luminii [8].

Ca o proprietate specială și, de asemenea, ca o amprentă a comportării "massless" a fermionilor Dirac, ceea ce face grafenul un material foarte atractiv din punct de vedere teoretic, este anormalitatea efectului Hall cuantic întreg măsurat experimental [9], la temperatura camerei [10].

Deoarece stările energetice ale pozitronilor în interiorul barierei sunt aliniate cu stările energetice continue ale electronilor din afara barierei, acești purtători sunt transmiși cu probabilitate unitate [11]. Ca urmare, aceștia evoluează într-un mod neobișnuit în prezența potențialelor limitatoare ce pot fi induse de diverse grade de dezordine.

Astfel, proprietățile particulelor chirale, lipsite de masă, aparținând sublaticelor distincte din grafen și descrise de ecuația Dirac în vecinătatea celor două puncte de întoarcere, K și K', reprezintă un câmp activ de cercetare. De asemenea, considerăm în ceea ce urmează o configurație de inducție magnetică puternică, ortogonală pe un câmp electric de intensitate slabă.

Folosind teoria perturbațiilor, obținem amplitudinile de tranziție în primul ordin precum și curentul corespunzător. Apoi, generalizăm această analiză, pentru câmpuri electro-magneto-statice arbitrare, și concluzionăm că ecuația de tip Dirac pentru fermionii "massless" este satisfăcută de funcțiile Heun biconfluente.

Chiar dacă aceste funcții au fost intens studiate în ultimii ani, în situații relevante pentru fizica, chimie și inginerie [12], încă există probleme atunci când, acestea împreună cu prima lor derivată, sunt investigate sub formă generală. De aceea, pentru o mai bună înțelegere a fenomenului fizic, ne vom concentra pe cazuri speciale ce pot fi investigate cu ajutorul dezvoltărilor în serie, cel puțin pentru anumite intervale ale parametrilor esențiali ai modelului.

Ecuația Dirac asociată și funcția de undă a fermionilor

În unități naturale, adică pentru $\hbar = c = 1$, ecuația Dirac 4-dimensională, ce descrie un fermion fără masă ce evoluează într-un câmp electric ortogonal pe un câmp magnetic, orientate în lungul lui Ox și Oz, respectiv, poate fi scrisă sub forma,

$$\gamma^i D_i \Psi = 0, \;\; D_i = \partial_i - iqA_i, \tag{1}$$

unde derivatele covariante D_i conțin componentele 4-potențialului

$$A_2 = B_0 x, \quad A_4 = E_0 x.$$

În sfârșit, suntem în măsură să scriem expresia completă a funcției de undă (3), până la un factor de normare $\mathcal{N}$, prin

$$\Psi = \mathcal{N} e^{i(p_y - \omega t)} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2} + a\zeta\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \zeta^2 HB_1 \\ \zeta^2 HB_2 \\ -\frac{i}{d\lambda^2}\left[2 - (b\lambda^2 + 1)(\zeta^2 - p\lambda\zeta) + \zeta \frac{d}{d\zeta}\right] HB_2 \\ -\frac{i}{d\lambda^2}\left[2 + (b\lambda^2 - 1)(\zeta^2 + p\lambda\zeta) + \zeta \frac{d}{d\zeta}\right] HB_1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

unde

$$a \equiv (p\lambda)(b\lambda^2) = \sqrt{2(n+2)}\ \frac{b}{d},\ \text{și}\ HB_{1,2} \equiv HeunB[2, -2a, p^2 d^2 \lambda^6, \mp 2p\lambda; \zeta]. \tag{19}$$

Componentele nenule ale densității de curent definite ca

$$j^i = iq\overline{\Psi}\gamma^i\Psi,\ \text{ cu }\ \overline{\Psi} = \Psi^\dagger \beta, \tag{24}$$

sunt densitatea de sarcină electrică

$$\rho_e = q\Psi^\dagger\Psi$$

care generează un potențial electric prin ecuația Poisson și componenta spațială, j_y, a cărei dependență de intensitățile câmpurilor externe este

$$j_y = q\Psi^\dagger\alpha^2\Psi = \frac{4q}{d}|\mathcal{N}|^2 \frac{\xi^2}{\lambda^2}[p\lambda\zeta - b\lambda^2\zeta^2]\exp(-\zeta^2) =$$

$$= \frac{4}{E_0}|\mathcal{N}|^2 \frac{{x_*}^2}{\lambda^4}\left[\left(p_y + \omega\frac{b}{d}\right)x_* - b{x_*}^2\right]\exp\left(-\frac{{x_*}^2}{\lambda^2}\right) =$$

$$\approx \frac{4q^2}{E_0}|\mathcal{N}|^2\left(x + \frac{\omega}{qE_0}\right)^3 (B_0^2 - E_0^2)(p_y - qB_0 x), \tag{25}$$

ω fiind cuantificat în (17).

Concluzii capitolul III

În secțiunea III.2. analizăm comportamentul particulelor scalare relativiste, ce evoluează într-o configurație de câmpuri electrice şi magnetice statice ortogonale. Lucrând în coordonate carteziene, se rezolvă ecuaţia Klein-Gordon, obţinând funcţiile de undă şi nivelurile energetice corespunzătoare, în bună concordanţă cu spectrul energetic găsit de Novoselov pentru probele de grafen. În limita semi-relativistă, se regăsesc bine-cunoscutele niveluri de energie Landau. În ultima parte, în cadrul unui studiu termodinamic, se calculează funcţia de partiţie, principalele mărimi termodinamice şi ecuaţia de stare.

Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [13].

În secțiunea III.3., începând cu funcția de undă ce caracterizează fermioni lipsiti de masă ce evoluează în câmpuri electrice și magnetice ortogonale, scrisă în termenii funcțiilor Heun biconfluente, analizăm unele cazuri fizic interesante. Când funcția HeunB se trunchiază la formă polinom, calculăm componentele esențiale ale densității de curent conservate. Pentru un câmp electric nul, obținem familiarele funcții Hermite asociate și analizăm dependența de lățimea eșantionului. In caz contrar, corespunzător unui singur câmp electric static, obținem funcțiile HeunB de variabilă și parametri complecși.

Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [14].

Bibliografie selectivă capitolul III

[1] K. von Klitzing, K. Dorda, M. Pepper, *The Fractional Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett.,Vol. 45, p. 494, (1980).

[2] R. B. Laughlin, *Anomalous Quantum Hall effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Phys. Rev. Lett., Vol. 50, p. 1395, (1983).

[3] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic System*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1997)

[4] M. A. Dariescu, C. Dariescu, Murariu G., *Topological Quantum Dynamics of Charged Bosons*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 28, Issue 1, p. 1, (2006).

[5] K. S. Novoselov, E. Mc Cann, S.E. Morozov, *Unconventional Quantum Hall Effect and Berry's Phase of 2 in Bilayer Graphene*, Nature Physics, Vol. 2, p. 177, (2006).

[6] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, (1999).

[7] L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).

[8] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, și A.K. Geim, *The electronic properties of graphene*, Rev Mod. Phys., Vol. **81**, No. 1, p. 109, (2009).

[9] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*, Nature, Vol. **438**, p. 197, (2005).

[10] K. S. Novoselov, și colab., *Room-Temperature Quantum Hall Effect in Graphene*, Science, Vol. 315, No. 5817, p. 1379, (2007).

[11] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene*, Nature Physics, Vol. 2, p. 620, (2006).

[12] F.M. Arscott, *Heun's equation*, in: Ronveaux, A. (ed.) Heun's Differential Equations. Oxford University Press, Oxford (1995).

[13] M.A. Dariescu, O. Buhucianu , C. Crețu, *The Lorentz-invariant U(1)-gauge theory of scalars in static external fields and thermal properties*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul LVIII(LIX), Fasc. 2, p. 43, (2012).

[14] M.A. Dariescu, C. Dariescu, C. Crețu, O. Buhucianu, *Analytic Study of Fermions in Graphene; Heun Functions and Beyond*, Rom.Journ.Phys.,Vol. 58, Nos.7-8, p. 706, Bucharest, (2013).

CAPITOLUL IV

Simetrii externe în formulare local covariantă cu aplicații în extra-dimensiuni și cosmologie Schrödinger

III. 1. Geometria de gauge invariantă

III.2. Principii de geometrizare în extra-dimensiuni

III.3. Tratarea cuantică a Universului FRW deformat după a 5-a dimensiune, în imagine Schrödinger

După munca de pionierat a lui Randall și Sundrum (RS) [1], diferite scenarii braneworld au fost formulate pornind de la ideea că Universul nostru, în care particulele modelului standard sunt prinse, este încorporat într-un hiperspațiu (bulk) de dimensiune mai mare. Deoarece, în modelul RS, dacă nu se utilizează distribuția Dirac după a cincea dimensiune, materia este practic exclusă din membrană, au fost propuse diverse mecanisme de confinare, dintre care cel mai familiar este cuplarea la un câmp scalar din bulk.

În timp ce pentru domeniile 4-dimensionale Minkowski, factorul de deformare (warp) și funcția scalară de undă au fost parametrizate în termenii unui model superpotențial [2], când se trece la membrane îndoite, trebuie să se rezolve în întregime ecuațiile lui Einstein, în scopul de a analiza felul în care hiperspațiul interacționează cu materia de pe frontiera geometriilor de Sitter sau anti-de Sitter [3].

Presupunând că structura observată la scară largă poate exista pe membrana încorporată în bulk-ul AdS_5 , susținut de tensorul energie-impuls materie al unui fluid perfect, discutăm (atemporal) ecuația Wheeler-De Witt (WDW) [4], scrisă pentru Universul 5-dimensional k = 0-FRW , al cărui factor de deformare și funcție de scală au fost obținute în lucrarea [5].

Universul deformat FRW

Considerăm spațiul 5-dimensional descris de metrica

$$ds_5^2 = e^{2F(\tau,w)}\eta_{ik}dx^i dx^k + (dw)^2,\ i,k = \overline{1,4}\ , \tag{1}$$

unde $(\eta_{ik}) = \mathrm{diag}[1,1,1,-1]$ este metrica uzuală Minkowski, iar factorul warp, e^F, depinde de timpul conform τ și de extra dimensiunea, $x^5 = w$. Implicăm formalismul Cartan, definind reperul pseudo-ortonormal $\{e_a\}_{a=\overline{1,5}}$, cu bază duală

$$\omega^a = e^F dx^a,\ \omega^5 = dw\,,$$

astfel că metrica devine

$$ds_5^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b\,,$$

cu $(\eta_{ab}) = \mathrm{diag}[1,1,1,-1,1]$. Din prima ecuație Cartan,

$$d\omega^\mu = -F_{|4}\omega^\mu \wedge \omega^4 - F_{|5}\omega^\mu \wedge \omega^5, \tag{2}$$

$$d\omega^4 = -F_{|5}\omega^4 \wedge \omega^5,$$

$$d\omega^5 = 0, \tag{3}$$

unde $\mu = \overline{1,3}$, apar coeficienții de conexiune

$$\Gamma_{\alpha 4\alpha} = F_{|4},\quad \Gamma_{\alpha 5\alpha} = F_{|5},\quad \Gamma_{454} = -F_{|5}, \tag{4}$$

și, prin aplicarea formalismului din relativitatea generală, rezultă următoarele componente tensoriale Einstein 5-dimensionale:

$$G_{\alpha\alpha} = -\left[2F_{|44} + 3\left(F_{|4}\right)^2\right] + 3[F_{|55} + 2\left(F_{|5}\right)^2],$$
$$G_{44} = 3\left(F_{|4}\right)^2 - 3[F_{|55} + 2\left(F_{|5}\right)^2], \tag{5}$$
$$G_{55} = -3\left[F_{|44} + 2\left(F_{|4}\right)^2\right] + 6\left(F_{|5}\right)^2, \qquad G_{45} = -3F_{|54}.$$

Ca și în [5], separăm variabilele în funcția de deformare

$$F(\tau, w) = f(\tau) + h(w), \tag{6}$$

astfel încât $G_{45} = 0$, pentru a nu avea curent material pe extra-dimensiune. Se poate verifica cu ușurință că un fluid perfect cu

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P\eta_{ab}, \tag{7}$$

într-un reper co-mobil, cu $u_4 = -1$ și $(u_\alpha, u_5) = 0$ este o sursă potrivită pentru ecuațiile lui Einstein,

$$G_{ab} + \eta_{ab}\Lambda = \kappa T_{ab}, \tag{8}$$

unde Λ și κ sunt respectiv constanta cosmologică și constanta lui Einstein, în hiperspațiul 5-dimensional.

Cu această alegere, (8) dobândesc forma explicită de mai jos:

$$-e^{-2(f+h)}\left[2f_{,44} + \left(f_{,4}\right)^2\right] + 3\left[h_{,55} + 2\left(h_{,5}\right)^2\right] + \Lambda = \kappa P;$$

$$3e^{-2(f+h)}\left(f_{,4}\right)^2 - 3\left[h_{,55} + 2\left(h_{,5}\right)^2\right] - \Lambda = \kappa\rho; \tag{9}$$

$$-3e^{-2(f+h)}\left[f_{,44} + \left(f_{,4}\right)^2\right] + 6\left(h_{,5}\right)^2 + \Lambda = \kappa P;$$

unde $f_{,4}$ este derivata în raport cu timpul conform, τ. Din prima și din a treia ecuație, putem scrie o relație geometrică între funcțiile metrice *f* și *h*:

$$e^{-2f}\left[f_{,44} + 2\left(f_{,4}\right)^2\right] + 3e^{2h}h_{,55} = 0. \tag{10}$$

Variabilele fiind separate, putem impune

$$e^{2h}h_{,55} = \omega^2, \tag{11}$$

și ajungem la următoarele soluții [4]:

$$h(w) = \ln\left[\frac{\omega}{Q_0}\cosh(Q_0 w)\right], \tag{12a}$$

$$f(t) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{b}{2\omega}\sin(3\omega t)\right]. \tag{12b}$$

Constantă Q_0 poate fi legată de constanta cosmologică a spațiului AdS_5 (care de asemenea, stabilește scala pentru AdS_5), prin

$$Q_0^2 = -\frac{\Lambda}{6} \sim \frac{1}{L^2},$$

și parametrul ω este proporțional cu valoarea absolută a constantei cosmologice asupra membranei vizibile, ca în [6],

$$\omega = \sqrt{\frac{|\Omega|}{3}}.$$

În cele din urmă, cu scopul de a se înțelege semnificația parametrului b, subliniem faptul că funcția scală corespunzătoare ecuației (12b),

$$a(t) = e^{f(t)} = \left[\frac{b}{2\omega}\sin(3\omega t)\right]^{1/3}, \tag{13}$$

descrie de fapt un Univers periodic, cu o singularitate cosmologic finită de gen temporal, pentru

$$3\omega t_n = n\pi.$$

Atunci când factorul Hubble definit ca $H = \dot{f}$ dispare, pentru

$$3\omega t_k = (2k+1)\pi/2,$$

are loc o fază Minkowski instantanee, de maxim al funcției de scală a_0, pentru care parametrul b poate fi asociat cu a_0 prin relația,

$$b = 2\omega a_0^3. \tag{14}$$

Analiza cuantică

Așa cum este bine cunoscut, cosmologia cuantică, în formularea sa tradițională, se bazează pe ecuația Wheeler-De Witt [4]

$$\mathbf{H}\psi = 0, \tag{15}$$

unde singurul grad de libertate dinamică este raza Universului, a, iar ψ este funcția de undă a Universului.

Analiza geometro-dinamică pe clasa de soluții 5D-deformate-($k = 0$)-RW

$$ds_5^2 = e^{2h(w)}\left[e^{2f(t)}(d\vec{x})^2 - (dt)^2\right] + (dw)^2,$$

unde $w \in \mathbb{R}$ este coordonata pentru a cincea dimensiune la nivel local și pentru funcția de deformare $h\,(w)$ din (12a), ne conduce la următoarea ecuație cu hamiltonianul

$$\mathbf{H} = \dot{a}^2 + V(a) = 0,$$

și potențialul efectiv

$$\boldsymbol{V} = \omega^2 a^2 - \frac{b^2}{4a^4} = \omega^2 a^2\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^6\right],$$

pentru $a(t)$ dată de (13).

Aceasta sugerează definiția lagrangianului "adevărat", adică în sens canonic (nu densitate sau altceva), ca fiind

$$\mathbf{L}[a, \dot{a}] = \ell_0[\dot{a}^2 - \boldsymbol{V}(a)]\,,$$

unde ℓ_0 este inversul constantei scală de energie (ce stabilește lungimea caracteristică care provine de la a cincea dimensiune), și ca de obicei funcționala de acțiune în raport cu funcția de scală a Universului

$$\mathbf{S}[a] = \int \mathbf{L}[a, \dot{a}]dt.$$

Impulsul canonic conjugat corespunzător

$$\mathrm{p} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{a}} = 2\ell_0 \dot{a}\,,$$

împreună cu lagrangianul de mai sus, conduc, prin transformarea canonică tradițională

$$\mathbf{H} = \mathrm{p}\dot{a} - \mathbf{L}\,,$$

către hamiltonianul asociat

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\ell_0}\mathrm{p}^2 + \ell_0 \boldsymbol{V}(a). \tag{17}$$

Considerând $\hat{a}$ și $\hat{\mathrm{p}}$ drept operatori cu relații standard de comutare, în reprezentare de coordonate, adică

$$\mathrm{p} \to \hat{\mathrm{p}} = -i\frac{\partial}{\partial a},$$

ecuația WDW (15), cu potențial (16), se scrie explicit

$$\frac{d^2\psi}{da^2} - W(a)\psi = 0, \tag{18}$$

cu

$$W(a) \equiv W_0 a^2\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^6\right], \tag{19}$$

unde $W_0 = 4\ell_0^2\omega^2$ este amplitudinea caracteristică a potențialului redus $W(a)$.

Pentru valori mici ale lui a, ecuația (18) dobândește forma de mai jos:

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + \frac{d^2}{a^4}\psi = 0, \tag{20}$$

unde $d^2 \equiv W_0 a_0^6$, soluțiile sale fiind exprimate în termenii funcției Bessel,

$$\psi(a) = \sqrt{a}\cdot \mathcal{J}_{\pm 1/2}\left(\frac{d}{a}\right) = a\sqrt{\frac{2}{\pi d}}\cdot\left\{\sin\left(\frac{d}{a}\right), \cos\left(\frac{d}{a}\right)\right\}. \tag{21}$$

Acum, se poate aplica teorema reziduurilor pentru a calcula integrala

$$\int_{\boldsymbol{R}} \psi^2 da = \frac{2}{\pi d}\int_{\boldsymbol{R}} a^2 \sin^2\left(\frac{d}{a}\right) da = \frac{8}{3} W_0 a_0^6.$$

În situația opusă, atunci când se neglijeaza contribuția lui $1/a^4$ în (19), soluția ecuației

$$\frac{d^2\psi}{da^2} - W_0 a^2\psi = 0,$$

conține funcția Bessel $Z_{\pm 1/4}$ din variabilă imaginară, astfel încât

$$\psi = \sqrt{a}\cdot Z_{\pm 1/4}\left(\pm\frac{i}{2}\sqrt{W_0 a^2}\right).$$

Revenim acum la ecuația Schrödinger, versiunea cu evoluție în timp a mini-superspațiului WDW (15), și anume

$$-\frac{1}{4\ell_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2} + \ell_0 V(a)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{22}$$

Pentru stările staționare

$$\psi_E(a,t) = \psi_E(a)e^{-iEt}, \tag{23}$$

funcțiile de amplitudine ψ_E trebuie să fie soluții ale ecuației Schrödinger

$$\frac{d^2\psi_E}{da^2} + 4\ell_0(E - \ell_0 V)\psi_E = 0\,,$$

care pot fi scrise într-o forma fizică adimensională

$$\frac{d^2\psi_E}{da^2} + (\epsilon - W(a))\psi_E = 0, \tag{24}$$

unde am introdus notațiile (19) și

$$\epsilon \equiv 4\ell_0 E. \tag{25}$$

Chiar dacă nu este posibil să se scrie soluția analitică pentru ecuația de tip Schrödinger generală (24), scrisă ca

$$\frac{d^2y}{da^2} + S(a)y = 0,$$

unde, în cazul nostru,

$$S(a) = \epsilon - W_0 a^2 + \frac{d^2}{a^4},$$

putem studia diferite proprietăți, în aproximarea WKB, valabile pentru anumite domenii ale parametrilor. Astfel, ca urmare a teoriei dezvoltate în [7], pentru $S(a) > 0$ și

$$-\frac{1}{4}\frac{S''}{S^2} + \frac{5}{16}\frac{(S')^2}{S^3} \ll 1$$

soluția capătă forma periodică

$$y(a) \sim \frac{C}{[S(a)]^{1/4}} \sin g(a),$$

în care faza

$$g(a) = K + \int_{x_0}^{a} [S(x)]^{1/2}\, dx$$

dă numărul de zerouri, a_k, până la a, pentru $g(a_k) = k\pi$.

În analiza din (24), avem de a face în primul rând cu valori mici ale lui a, pentru care se obține

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + \left(\epsilon + \frac{d^2}{a^4}\right)\psi = 0. \tag{26}$$

Odată cu schimbarea funcției

$$\psi = \sqrt{a}\varphi(a), \tag{27}$$

ecuația de mai sus devine

$$\frac{d^2\varphi}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{d\varphi}{da} + \left(\epsilon - \frac{1}{4a^2} + \frac{d^2}{a^4}\right)\varphi = 0, \tag{28}$$

sau, în termeni de noua variabilă $\xi = (1 + a^2)/(1 - a^2)$, se scrie

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{2\xi}{\xi^2 - 1}\frac{d\varphi}{d\xi} + \\ + \frac{1}{(\xi^2 - 1)^3}\left[\epsilon + d^2 + \frac{1}{4} - 2(\epsilon - d^2)\xi + (\epsilon + d^2 - \frac{1}{4})\xi^2\right]\varphi = 0. \tag{29}$$

Comparând ultima expresie cu ecuația Heun [6]

$$\frac{dy^2}{dz^2} - \frac{1}{(z^2 - 1)^2}[\alpha + 2z + \alpha z^2 - 2z^3]\frac{dy}{dz} + \\ + \frac{1}{(z^2 - 1)^3}[\delta + (2\alpha + \gamma)z + \beta z^2]y = 0, \tag{30}$$

putem identifica funcția φ ca fiind funcția Heun dublu confluentă, HeunD [8], de variabilă $\xi = (a^2 - 1)/(a^2 + 1)$ și parametri

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \epsilon + d^2 - \frac{1}{4}, \qquad \gamma = -2(\epsilon - d^2), \qquad \delta = \epsilon + d^2 + \frac{1}{4}. \tag{31}$$

În cazul valorilor mari pentru a, odată ce vom neglija contribuția lui $1/a^4$, ecuația rezultată

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + (\epsilon - W_0 a^2)\psi = 0 \tag{32}$$

este satisfăcută de funcțiile asociate Hermite [9]

$$\psi_n(a) = C_n \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{W_0}a^2\right) H_n\left(W_0^{1/4}a\right), \tag{33}$$

cu spectrul de energie

$$\epsilon_n = (2n+1)\sqrt{W_0} \Rightarrow E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{|\Omega|}{3}}. \tag{34}$$

În cel mai simplu caz non-trivial, putem lua în considerare stările excitate,

$$\begin{aligned} \psi_0(a,t) &= \left(\frac{W_0}{\pi^2}\right)^{1/8} \exp\left[-\frac{1}{2}\sqrt{W_0}a^2\right] \exp\left[-\frac{i}{2}\omega t\right], \\ \psi_1(a,t) &= \sqrt{2}\left(\frac{W_0^3}{\pi^2}\right)^{1/8} a \exp\left[-\frac{1}{2}\sqrt{W_0}a^2\right] \exp\left[-\frac{i}{2}\omega t\right], \end{aligned} \tag{35}$$

cu probabilitățile inițiale de 3/4 , respectiv 1/4, și obținem randamentele funcției periodice

$$a(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{W_0}{\pi^2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\sqrt{W_0}a^2} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} + W_0^{1/4} a e^{i\omega t}\right]\left[\sqrt{\frac{3}{2}} + W_0^{1/4} a e^{-i\omega t}\right] da =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\ell_0 \omega}} \cos(\omega t). \tag{36}$$

Pentru valori mari ale numărului cuantic n, astfel încât $\epsilon \gg 4\sqrt{W_0}$, scriem soluția ecuației (32) sub forma

$$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{a}} M_{\lambda,\mu}\left(\sqrt{W_0}a^2\right), \tag{37}$$

unde $M_{\lambda,\mu}$ este funcția Whittaker [7] , cu

$$\lambda = \frac{1}{4}\frac{\epsilon}{\sqrt{W_0}}, \qquad \mu = \frac{1}{4},$$

și prin angajarea reprezentarii asimptotice (valabilă pentru valori mari ale lui λ)

$$M_{\lambda,\mu}(\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2\mu+1) \lambda^{-\mu-\frac{1}{4}} \xi^{\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{\lambda\xi} - \mu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \tag{38}$$

obținem funcția de amplitudine a "particulei libere"

$$\psi \sim \frac{W_0^{3/8}}{\sqrt{\epsilon}} \sin\sqrt{\epsilon}\, a. \tag{39}$$

Astfel, sistematizând, în secțiunea de față discutăm ecuația Schrödinger, versiunea cu evoluție în timp a ecuației WDW, pentru Universul cu cinci dimensiuni k = 0-FRW, al cărui factor warp și funcție scală sunt, respectiv, date de (12a) și (13). Chiar dacă există o dezbatere activă asupra includerii în teorie a unui termen derivat din timp în ecuația înghețată WDW, strategii pentru conectarea cu ecuația Schrodinger [10] dependentă de timp au fost propuse.

Analiza noastră geometro-dinamică se bazează pe potențialul efectiv (16), pentru care ecuația Schrödinger scrisă pentru stări staționare este (24). O astfel de ecuație nu are o soluție analitică de formă închisă pentru $W(a)$, dat de (19). Cu toate acestea, pentru intervale specifice ale parametrilor, se pot studia diferite proprietăți, ca de exemplu densitatea de noduri ale funcțiilor de undă corespunzătoare, folosind abordarea WKB dezvoltată în [7].

Pentru valori mici ale lui a, vom obține că funcția de undă este exprimată în termenii funcției Heun dublu confluentă, de parametri (31). Chiar dacă aceste funcții au fost intens lucrate în ultimii ani, în situații relevante pentru fizică, chimie și inginerie [11], există probleme nerezolvate atunci când se ocupă cu expresii generale, în special legate de normare sau extinderi ale lor în serii de diverse forme. Totuși, soluțiile rezonabile fizic descriind spectrele staționare de comptonizare într-un flux de fotoni în spațiul frecvențelor, scrise în termenii funcției HeunD și ale derivatei sale, au fost discutate în [12].

În situația opusă (a mare), rezultatele pot fi puse într-o formă mult mai transparentă, funcțiile asociate Hermite conducând, pentru amestecul starilor excitate, la funcția periodică (36), cu aplicații macroscopice în clasa Universurilor oscilante, Robertson-Walker, de curbură spațială nulă. În cele din urmă, de la reprezentarea asimptotică a funcției Whittaker, (38), valabilă pentru valori mari ale numărului cuantic n, se obține amplitudinea "particulei libere" (39).

IV.4. Asupra unei ecuații Schrödinger cu potențial special dedus dintr-o metrică cosmologică 5-dimensională

Concluzii capitolul IV

Secțiunea IV.3., este dedicată ecuației Wheeler-De Witt, cu evoluție în timp, versiunea Schrödinger, scrisă pentru Universul deformat 5-dimensional k = 0-FRW. Pentru valori mici ale factorului de scală cosmologică, a, funcția de undă a Universului este exprimată în termenii funcției Heun dublu confluente. Cum era de asteptat, pentru valori mari ale lui a, obținem bine-cunoscutele funcții Hermite asociate. În cadrul aproximării semiclasice, valabilă pentru n mare, reprezentarea asimptotică a funcțiilor Whittaker conduce la un comportament de tip "particulă liberă".

Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [13].

Secțiunea IV.4. este dedicată ecuației Schrödinger 1-dimensională cu un potențial special, versiune a ecuației Wheeler-De Witt. Pentru valori mici ale factorului de scală cosmologică, funcția de undă a Universului este exprimată în termenii funcției Heun Double confluente. Pentru valori mari, obținem bine-cunoscutele funcții Hermite asociate.

Aceste rezultate constituie subiectul lucrării [14].

Bibliografie selectivă capitolul IV

[1] L. Randall, R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett., Vol. 83, Issue 17, p. 3370, (1999).

[2] D. Bazeia, F.A. Brito, L. Losano, *Scalar fields, bent Branes, and RG flow*, J. High Energy Phys., Vol. 2006, Issue 11, p. 64, (2006).

[3] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. B, Vol. 478, p. 434, (2000).

[4] J.A. Wheeler, *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*, Batelle Rencontres. Benjamin, New York, (1968).

[5] M.A. Dariescu, C. Dariescu, *Robertson-Walker Branes with massless scalars and cosmological term*, Astropart. Phys.,Vol. 34, Issue 2, p. 116, (2010).

[6] R. Koley, J. Mitra, S. SenGupta, *Fermion localization in a generalized Randall-Sundrum model*, Phys. Rev. D, Vol. 79, Issue 4, p. 1902, (2009).

[7] E.R. Arriola, A. Zarzo, J.S. Dehesa, *Spectral properties of the biconfluent Heun equation*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 37, p. 161, (1991).

[8] F.M. Arscott, *Heun's equation*, in: Ronveaux, A. (ed.) Heun's Differential Equations, Oxford University Press, Oxford (1995).

[9] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 4th edn Academic, New York, (1965).

[10] M. Pavsic, *Condensed Wheeler-DeWitt Equation in Five Dimensions and Modified QEDmatter physics*, Preprint arXiv: 1207.4594 [gr-qc], (2012).

[11] P.P. Fiziev, D.R. Staicova, *Solving systems of transcendental equations involving the Heun functions*, Preprint arXiv: 1201.0017v1 [hep-ph], (2011).

[12] A.E. Dubinov, *Exact stationary solution of the Kompaneets kinetic equation*, Tech. Phys. Lett., Vol. 35, No. 3, p. 260, (2009).

[13] M.A. Dariescu, C.Dariescu, C.Cretu, *The Quantum Treatment of the 5D-Warped Friedmann–Robertson–Walker Universe in Schrödinger Picture*, International Journal of Theoretical Physics, Volume 52, Issue 4, p. 1345, (2013).

[14] C.Crețu, *On a Schrödinger-like equation with some special potential*, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LIX(LXIII), Fasc. 3, p. 67, (2013).

CONCLUZII GENERALE

Deoarece fiecare capitol conţine o secţiune de concluzii în care sunt evidenţiate principalele rezultate, făcându-se şi comparaţii cu lucrările altor autori, în această secţiune vom sintetiza câteva concluzii generale pe care le considerăm reprezentative şi care constituie subiectul lucrărilor publicate în reviste cotate ISI şi în reviste recunoscute de CNCSIS.

Rezultatele obţinute pot fi sintetizate astfel:

1. Pornind de la o clasă de metrici planar simetrice în coordonate izotrope am obținut vectorii Killing. Folosind o schimbare de coordonate adecvată, am calculat derivata Lie pentru metrica

$$ds^2 = e^{2f(z,t)}(dx^2 + dy^2) + dz^2 - dt^2 \ .$$

și respectând condițiile de integrabilitate am rezolvat ecuațiile Killing corespunzătoare.
[C. Crețu, C. Dariescu, *On the Isometry Group for a Class of Planary Symmetric Metrics in Null-coordinate Formulation* , prezentare la TIM14 Physics Conference, Univ. de Vest, Timișoara, (2014).]

2. Pornind de o idee a lui R.G. Beil, am modificat metrica spațiului Minkowski în care o particulă încărcată se mișcă conform ecuației Lorentz. Modificarea este de așa natură încât, cu noua metrica și în noul spațiu, particula se deplasează pe o geodezică. O nouă metrică a fost obținută din metrica initială printr-o transformare gauge. Dependența de punct (x) și viteză (v) a factorului de scală b se transmite la vectorul B_μ și mai departe la metrica $\bar{g}_{\mu\nu}$. Fiind dependentă de punct și viteză, $\bar{g}_{\mu\nu}(x,v)$ este o metrică Lagrange generalizată.
[C.Crețu, *Electrodynamics from modified Schwarzschild metric* , prezentare la TIM13 Physics Conference, Univ. de Vest, Timișoara, (2013).]

3. Pentru bozonii relativişti evoluând în câmpuri electrice şi magnetice statice ortogonale, s-au obţinut funcţiile de undă şi spectrul energetic, în bună concordanţă cu rezultatele altor autori. În cadrul studiului termodinamic, funcţia de partiţie exprimată prin funcţiile Euler şi Riemann generalizate a condus la principalele mărimi termodinamice, a magnetizaţiei şi susceptibilităţii. Ecuaţia de stare conţine termenul de tip Hall şi contribuţii suplimentare ce caracterizează particulele ultra-relativiste. În cazuri particulare, pentru o anumită plajă a parametrilor, ecuaţia de stare conduce la rezultatele termodinamice clasice (temperaturi înalte) şi la efecte cuantice (temperaturi joase), în concordanţă cu teorema lui Nernst.
[M.A. Dariescu, O. Buhucianu , C. Creţu, *The Lorentz-invariant U(1)-gauge theory of scalars in static external fields and thermal properties*, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LVIII(LIX), Fasc. 2, p. 43, (2012).]

4. Am analizat unele cazuri fizic interesante începând cu funcția de undă ce caracterizează fermionii lipsiti de masă, în câmpuri electrice și magnetice ortogonale, scrisă în termenii funcțiilor Heun biconfluente. Când funcția HeunB se trunchiază la o formă de polinom, se pot calcula componentele esențiale ale densității de curent. Pentru un câmp electric nul, am obținut familiarele funcții Hermite asociate și am discutat dependența efectelor mesoscopice de lățimea eșantionului. În caz contrar, corespunzător unui singur câmp electric static, rezultă funcțiile HeunB de variabilă și parametri complecși.

[Dariescu, C. Dariescu, C. Crețu, O. Buhucianu, *Analytic Study of Fermions in Graphene; Heun Functions and Beyond*, Rom.Journ.Phys.,Vol. 58, Nos.7-8, p. 706, Bucharest, (2013).]

5. Am analizat ecuația Wheeler-De Witt, în versiune Schrödinger, scrisă pentru Universul deformat 5-dimensional-(k = 0)-FRW. Pentru valori mici ale factorului de scală cosmologică, a , funcția de undă a Universului este exprimată în termenii funcțiilor Heun biconfluente, intens studiate în ultimii ani. Cum era de asteptat, pentru valori mari ale lui a, obținem bine-cunoscutele funcții Hermite asociate. În cadrul aproximării semiclasice, valabil pentru n mare, reprezentarea asimptotică a funcțiilor Whittaker duce la comportamentul de tip "particulă liberă".
[M.A.Dariescu, C.Dariescu, C.Crețu, *The Quantum Treatment of the 5D-Warped Friedmann–Robertson–Walker Universe in Schrödinger Picture*, International Journal of Theoretical Physics, Volume 52, Issue 4, p. 1345, (2013).]

6. Am detaliat ecuația Schrödinger 1-dimensională pentru un potențial special, versiune a ecuației Wheeler-De Witt. Pentru valori mici ale factorului scară cosmologică funcția de undă a Universului este exprimată în termenii funcțiilor Heun biconfluente, iar pentru valori mari, obținem bine-cunoscutele funcții Hermite asociate.
[C.Crețu, *On a Schrödinger-like equation with some special potential*, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LIX(LXIII), Fasc. 3, p. 67, (2013).]

LISTA PUBLICAŢIILOR PROPRII

A. 1. PUBLICAŢII ÎN REVISTE COTATE ISI

1. M.A. Dariescu, C. Dariescu, C.Creţu, *The Quantum Treatment of the 5D-Warped Friedmann–Robertson–Walker Universe in Schrödinger Picture,* International Journal of Theoretical Physics, Volume 52, Issue 4, p. 1345, (2013).
(Factor de impact pe autor = 1,188 / 3 = 0,4 , Scor de influenţă = 0,182)

2. M.A. Dariescu, C. Dariescu, C.Creţu, O. Buhucianu, *Analytic Study of Fermions in Graphene; Heun Functions and Beyond,* Rom.Journ.Phys.,Vol. 58, Nos.7-8, p. 706, Bucharest, (2013).
(Factor de impact pe autor = 0,745 / 4 = 0,18 , Scor de influenţă = 0.124)

Factor de impact total / autor = 0,58
Scor de influenţă total = 0,306

A. 2. PUBLICAŢII ÎN REVISTE CATEGORIA B+ (RECUNOSCUTE CNCSIS)

1. M. A. Dariescu, O. Buhucianu, C. Creţu, *The Lorentz-invariant U(1)-gauge theory of scalars in static external fields and thermal properties,* Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LVIII(LIX), Fasc. 2, p. 43, (2012).
2. C.Crețu, *On a Schrödinger-like equation with some special potential*, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tomul LIX(LXIII), Fasc. 3, p. 67, (2013).

B. LUCRĂRI PREZENTATE LA CONFERINȚE INTERNAȚIONALE

1. M.A. Dariescu, C.Dariescu, C.Creţu, *The Schrödinger-Poisson heuristic limit of the Klein-Gordon-Maxwell-system and its S-Eigenmode solution for a spherically trapped particle,* ICPAM 2012, International Conference on Physics of Advanced Materials, Universitatea "Al.I.Cuza" din Iași, 20-23 sep. (2012).

2. C.Creţu, *Electrodinamică dintr-o metrică Schwarzshild modificată,* TIM 2013, Physics Conference – Physics without frontiers, Universitatea de Vest, Timișoara, 21-23 nov. (2013).

3. C. Creţu, C. Dariescu, *On the Isometry Group for a Class of Planary Symmetric Metrics in Null-coordinate Formulation,* TIM 2014, Physics Conference – Physics without frontiers, Universitatea de Vest, Timişoara, 20-22 nov. (2014).

C. LUCRĂRI PREZENTATE LA CONFERINŢE NAŢIONALE

1. C.Crețu, *Considerații asupra unei ecuații de tip Schrödinger cu un potențial special*, Conferința Națională de Fizică Aplicată, Universitatea Tehnică „Gh.Asachi" din Iași, 23-24 mai, (2013).