

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI
UNIVERSITATEA „AL. I. CUZA” IAȘI
FACULTATEA DE FIZICĂ

Ana-Camelia Lohan căs. Pîrghie

**Geometrodinamica deformărilor
spațio-temporale cu aplicații în
astrofizică și cosmologie**

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

**Conducător științific
Prof. univ. dr. Ciprian Dariescu**

IAȘI 2010

Universitatea „Al. I. Cuza” Iași
Rectorat

În atenția

.....

Vă facem cunoscut că la data de 21 mai 2010, ora 11 în amf. IV 13, d-na Ana-Camelia LOHAN căs. PÎRGHIE va susține, în ședință publică, teza de doctorat „**Geometrodinamica deformărilor spațio-temporale cu aplicații în astrofizică și cosmologie**” în vederea obținerii titlului științific de doctor în domeniul fundamental Științe Exacte, domeniul Fizică.

Comisia de doctorat are următoarea componență:

| | |
|--------------------------------|---|
| Prof.univ.dr. Dumitru Luca | Președinte Decan al Facultății de Fizică Universitatea „Al.I.Cuza”, Iași |
| Prof.univ.dr. Ciprian Dariescu | Conducător științific Facultatea de Fizică Universitatea „Al.I.Cuza”, Iași |
| Prof.univ.dr. Mihai Anastasiei | Referent Facultatea de Matematică Universitatea „Al.I.Cuza”, Iași |
| Prof.univ.dr. Irina Radinschi | Referent Facultatea de Construcții de Mașini și Management Industrial Universitatea Tehnică „Ghe. Asachi”, Iași |
| Conf. univ. dr. Francisc Aaron | Referent Facultatea de Fizică Universitatea din București |

Vă transmitem rezumatul tezei și vă invităm să participați la ședința publică de susținere a tezei.

Cuprins

| | |
|---|----|
| Stadiul actual al cercetărilor în domeniul astrofizicii și cosmologiei | 1 |
| Capitolul I | |
| MODELE SPECIALE ÎN DINAMICA NELINIARĂ | 2 |
| Introducere | 2 |
| 1.1. Proprietăți fazice și de invarianță în sistemul Lotka-Volterra | 2 |
| 1.2. Proprietăți cuantice la temperatură finită în electrodinamica planară a câmpului scalar | 3 |
| Capitolul II | |
| FORMALISMUL MATEMATIC AL RELATIVITĂȚII GENERALE | 5 |
| Introducere | 5 |
| 2.1. Elemente de geometrie diferențială și de Teoria Relativității Generale | 6 |
| 2.2. Soluții exacte consacrate ale ecuațiilor Einstein | 7 |
| Capitolul III | |
| COSMOLOGII ROBERTSON-WALKER ȘI TEORIA UNIVERSULUI FIERBINTE | 9 |
| Introducere | 9 |
| 3.1. Metrica Robertson-Walker | 10 |
| 3.2. Modelul fundamental al tensorului conservativ al materiei la scară cosmologică | 11 |
| 3.3. Proprietățile unei integrale prime a modelelor de univers închis cu constantă cosmologică | 12 |
| 3.4. Aspecte geometrice fundamentale în cosmologii Robertson-Walker neomogene | 15 |
| Capitolul IV | |
| UNIVERSUL TIMPURIU | 16 |
| Introducere | 16 |
| 4.1. Fluctuații cuantice și procese de generare în timpul inflației | 17 |
| Capitolul V | |
| CONSECINȚE ALE PATOLOGIEI GLOBALE ÎN DEFORMAREA SPAȚIALĂ A FUNCȚIEI DE POTENȚIAL A UNEI METRICI DE CÂMP GALACTIC UNIFORM | 22 |
| Introducere | 22 |
| 5.1. Geometria modelului | 23 |
| 5.2. Cuantificarea câmpului scalar și proprietăți termodinamice | 24 |
| 5.3. Câmpul electrostatic: ecuația lui Poisson și forma celei mai generale soluții | 26 |
| Capitolul VI | |
| EXTENSIUNI 5 DIMENSIONALE ALE DEFORMĂRILOR LORENTZIENE | 27 |
| Introducere | 27 |

II

| | |
|---|----|
| 6.1. Geometria deformării 5-dimensionale de scufundare a universului Einstein | 27 |
| 6.2. Dinamica 5-dimensională a câmpului scalar și spectrul maselor din „membrana” Einstein | 29 |
| 6.3. Teoria fermionilor în hiperspațiu (<i>bulk</i>). Forma extinsă a ecuației Dirac și modurile particulare de energie | 30 |
| CONCLUZII | 32 |
| Bibliografie selectivă | 36 |

Stadiul actual al cercetărilor în domeniul astrofizicii și cosmologiei

În decursul evoluției umane, permanenta nevoie de înțelegere a originii, dinamicii și formării structurilor observabile din univers a condus la necesitatea îmbogățirii continue a bagajului de cunoștințe care să ofere răspunsuri acestor întrebări fundamentale. Astăzi, cosmologia nu mai este doar o știință ce face legătura dintre astrofizică și teoria particulelor elementare ci, în lumina elaborării teoriilor de unificare a principalelor interacțiuni din natură (Grand Unified Theories), o mulțime de rezultate noi și provocatoare se situează la frontiera dintre cele două științe, ca de exemplu cele care au în vedere explicarea excesului de materie în univers.

De aceea, dezvoltarea fără precedent a investigațiilor în acest domeniu a condus la angajarea cercetătorilor din toată lumea în adevărate world machines, exemplu, construirea celui mai mare accelerator, denumit Large-Hadron-Collider (LHC). Ca o consecință a nivelului ridicat al energiilor implicate, se așteaptă ca proiectul LHC nu numai să semnaleze existența superpartenerilor (prezisă în cadrul teoriilor supersimetrice) dar și să pună în evidență formarea găurilor negre micro sau mesoscopice, precum și celebra energie de zero (zero-point energy), profund legată de problema constantei cosmologice. Aceasta din urmă a intrat în discuție odată cu publicarea rezultatelor furnizate de Wilkinson Map (începutul anul 2003) asupra parametrilor cosmologici ai universului observabil. Aceștia indică prezența universală a unei expansiuni accelerate, ce nu poate fi explicată decât prin introducerea conceptului straniu de energie întunecată (dark energy).

În contextul teoriilor gauge, se ridică întrebarea dacă pot fi extinse teoriile de unificare a interacțiunilor tari și electroslabe astfel încât să fie inclusă și gravitația. Încercările de soluționare au vizat, printre altele, lărgirea grupului de simetrie internă, extinderea algebrelor Lie la algebre Lie graduate, creșterea numărului de dimensiuni, negăsindu-se încă o soluție satisfăcătoare.

În urma prelucrării datelor experimentale ale celui mai sofisticat program de explorare la scară foarte largă a Metagalaxiei, experimentul COBE [45, 127], este practic sigur că natura a preferat un scenariu inflaționist, în primele momente planckiene ale nașterii ei, dar nu cunoaștem încă modul exact de dezvoltare a inflației spațio-temporale. Aceasta lacună conduce, printre altele, la incertitudini în estimarea teoretică a amplitudinii violării parității combinate, adică a ratei materie/antimaterie în univers, a numărului de higgsoni și a masei acestora, a existenței și naturii bozonului lepto-cuarc, X, și, într-o perspectivă mai largă, chiar a posibilelor căi de evoluție a prezentului univers observabil.

Astfel, la confluența geometriei cu fizica, au apărut domenii noi de investigație, extrem de promițătoare, îndreptându-se spre speranța de desăvârșire a visului lui Einstein, de realizare a Marii Teorii Unitare. De exemplu, utilizarea geometriei diferențiale în scopul construirii unor teorii gauge extinse pentru gravitație și restul materiei.

Alte direcții de cercetare implică pe lângă studiul modelelor cosmologice de bază și a câmpurilor materiale fundamentale definite pe acestea, o atenție deosebită așa-numitelor structuri spațio-temporale exotice. Dintre direcțiile moderne de cercetare, teoria M și corespondența AdS/CFT au lansat un adevărat program internațional de investigare a universului anti-de Sitter. În plus, studiul Pre-Big-Bang-ului și a noilor tipuri de inflație, în vederea rezolvării problemei constantei cosmologice, și modelele de univers cu conținut de tip dark energy au deschis calea unor intense cercetări în vederea înțelegerii mai profunde a legăturii geometro-dinamice dintre structura spațiu-timpului și natura conceptului de ruperea spontană de simetrie.

Capitolul I MODELE SPECIALE ÎN DINAMICA NELINIARĂ

Introducere

Fenomenele neliniare implică seturi de variabile pentru care o schimbare inițială a unei variabile nu produce o schimbare proporțională în comportarea acelei variabile sau a altora. Evoluția unui sistem dinamic cu un număr finit de variabile este descrisă de un sistem de ecuații diferențiale ordinare. Dacă constrângerile ce acționează asupra sistemului nu depind de timp, ecuațiile vor fi autonome

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{F}(\vec{X}, \lambda), \quad (1.1)$$

unde λ desemnează ansamblul parametrilor de control (constrângerilor) ce acționează asupra sistemului. Acești parametri λ asigură evoluția sistemului, prin variația acestora comportamentul dinamic al sistemului modificându-se.

1.1. Proprietăți fazice și de invarianță în sistemul Lotka-Volterra

Sistemul Lotka-Volterra (LV) constă din două ecuații diferențiale de ordinul întâi, neliniare, utilizat frecvent în descrierea dinamicii sistemelor biologice în care două specii interacționează, numite pradă-prădător.

În ceea ce privește *competiția neliniară*, pentru a obține un model realist LV pentru două specii, se va lua în considerare și interacțiunea intraspecifică. Forma generală a ecuațiilor ce descriu acest gen de competiție cuprinde și termeni de ordin logistic, [86]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x \left(\frac{k_1 - a_2 y - x}{k_1} \right), \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \left(\frac{k_2 - a_1 x - y}{k_2} \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

unde r_1/r_2 reprezintă rata de creștere pe cap de individ din specia 1 (x), respectiv 2 (y), k_1/k_2 - capacitatea de transport a mediului pentru populația x/y , iar a_1/a_2 - agresivitatea cu care x/y concurează cu y/x pentru resurse. Modul de interacțiune al speciilor este în funcție de coeficienții de agresivitate reciprocă dintre specii (a_1, a_2).

Reciprocitatea este acel gen de competiție care satisface condiția ca $a_1, a_2 > 0$. Am analizat pentru început situația în care cele două specii prezintă rate de consum egale ($a_1 k_1 = a_2 k_2$), [86]. În aceste condiții, dinamica speciilor, având în vedere și condițiile inițiale, este una diferită (fig. 1.1 pentru pradă, respectiv fig. 1.2 pentru prădător).

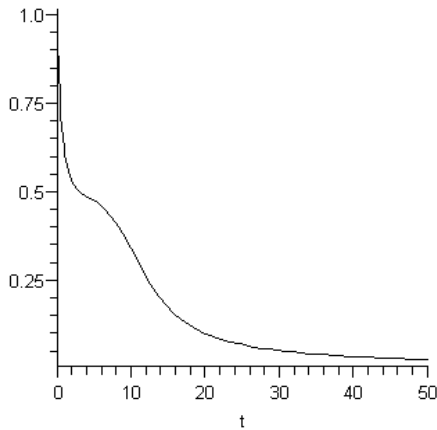


Fig. 1.1 $x = f(t)$

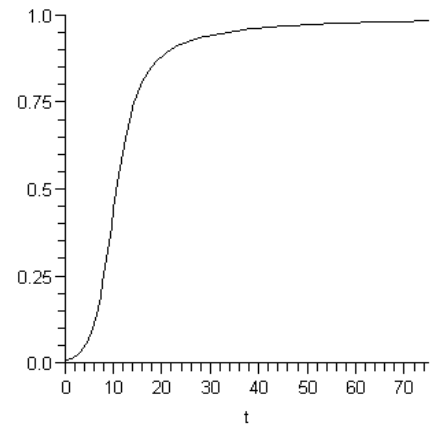


Fig. 1.2 $y = f(t)$

Stările staționare admise sunt două noduri stabile, nod instabil și un punct șea. Analiza cazurilor studiate implică o serie de concluzii, dintre care menționăm:

- În cadrul competiției liniare evoluția speciilor x sau y este una periodică.
- În cadrul *competiției neliniare*, una dintre specii poate în timp să scadă sau să crească până la o valoare staționară, pentru diferite valori ale parametrilor ce intervin în ecuații, obținându-se comportări distincte ale speciilor.
- Portretul fazelor prezintă diverse configurații; traiectorii închise pentru cazul liniar, noduri stabile și instabile, puncte șea pentru cazul neliniar.

1.2. Proprietăți cuantice la temperatură finită în electrodinamica planară a câmpului scalar

În scopul înțelegerii implicațiilor mecanicii cuantice în probe bidimensionale, au fost inițiate studii privind dinamica planară a unei particule relativiste încărcate, supuse acțiunii unor câmpuri electrice și magnetice externe.

Prin urmare, dezvoltăm o analiză la temperatură finită a dinamicii unui câmp scalar ce evoluează într-un câmp electric static, perpendicular pe un câmp magnetostatic omogen. Într-o abordare relativistă, obținem spectrul energiilor, în particular de tip Landau, ce evidențiază o dependență netrivială de câmpurile exterioare. Cu ajutorul funcției caracteristice, deducem potențialele termodinamice, [84], punându-se în evidență dependența acestora de temperatură și de excitațiile electromagnetice corespunzătoare parametrilor modelului. Stabilim apoi presiunea, în funcție de temperatură și de inducția câmpului magnetic, [84].

Plecând de la expresia lagrangeianului pentru un câmp scalar încărcat de masă m_0 și sarcină q (per cuantă) [21],

$$L = \eta^{ij} \psi_{;i}^* \psi_{;j} + m_0^2 \psi^* \psi + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}, \quad (1.3)$$

precum și calibrarea

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = B_0 x, \quad A_4 = E_0 x, \quad (1.4)$$

E_0, B_0 fiind intensitatea câmpului electric static, respectiv a câmpului magnetic static, și introducând notațiile

$$\begin{aligned} \Omega &= qB_0 / m_0^2, \quad \alpha = qE_0 / m_0^2, \\ \delta &= \frac{\Omega}{4\pi T}, \quad a = 1 - 2\rho \frac{\alpha}{\Omega^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

obținem spectrul Landau

$$\frac{\varepsilon_n}{m_0} \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \Omega - \rho \frac{\alpha}{\Omega}, \quad (1.6)$$

utilizat în analiza termodinamică a câmpului scalar relativist, în configurația menționată.

Utilizarea formalismului prezentat în literatura de specialitate, [34] permite scrierea funcției caracteristice în maniera

$$W = \ln Z = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[1 - \exp(-2\pi(2n + a)\delta) \right], \quad (1.7)$$

iar utilizarea formalismul funcției ξ și aplicarea teoremei reziduurilor, redă noua formă a funcției caracteristice

$$W = 2\pi\delta \left[\frac{1}{12} + \frac{a}{4} + \frac{a^2}{8} \right] - \frac{(a+1)}{2} \ln \delta - \frac{\pi}{24\delta} \left[1 - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) (a-1) \right]. \quad (1.8)$$

Toate aceste elemente permit calculul energiei libere și a energiei, expresii care în condițiile parametrului a egal cu unitatea devin [84]

$$\begin{aligned} F &= -T \ln Z = -\frac{11\Omega}{48} + T \ln \frac{\Omega}{4\pi T} + \frac{\pi^2 T^2}{6\Omega}, \\ U &= T - \frac{11\Omega}{48} - \frac{\pi^2 T^2}{6\Omega}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

În consecință, ecuația de stare se prezintă în maniera următoare

$$P = \frac{11\Omega}{48} - T \ln \frac{\Omega}{4\pi T} - \frac{\pi^2 T^2}{6\Omega}, \quad (1.10)$$

cea ce pune în evidență dependența presiunii nu numai de temperatură, ci și de câmpul magnetic extern, [84]. Când temperatura tinde la zero, valoarea presiunii este de ordinul $P_0 = 11\Omega/48$. În ceea ce privește parametrul termodinamic C_V , acesta poate fi determinat făcându-se apel la relația de definiție

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 1 - \frac{\pi^2 T}{3\Omega}, \quad (1.11)$$

observându-se că la o temperatură $T_0 = \frac{3}{\pi^2}\Omega$, căldura molară la volum constant se anulează [84]. Dependența parametrului C_V în funcție de temperatură, precum și de parametrul a (în care este inclusă atât intensitatea câmpului magnetic, cât și intensitatea câmpului electric) este redată în figura de mai jos.

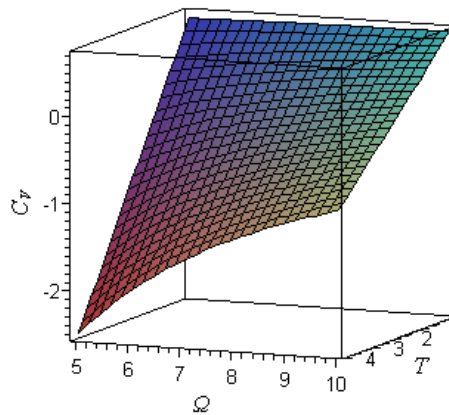


Figura 1.3 $C_V = f(T, \Omega, a)$, $a = 1$

În concluzie, am realizat un studiu la temperatură constantă (dar arbitrară) a bozonilor relativști care evoluează în câmpuri magnetico-electrico-statice omogene și ortogonale [84].

Capitolul II FORMALISMUL MATEMATIC AL RELATIVITĂȚII GENERALE

Introducere

Universul în care trăim ni se dezvăluie la scară observabilă, prin mișcare și interacțiune. Înainte de apariția teoriei Relativității Generale a lui Albert Einstein universul era privit ca fiind unul plat, de tip minkowskian, spațiu-timpul nefiind afectat de prezența materiei. Utilizând calculul tensorial

dezvoltat de Ricci și Levi-Civita, precum și geometria riemanniană, Einstein elaborează teoria Relativității Generale, publicată în lucrarea „Bazele teoriei Relativității Generale” în 1916. Identificarea gravitației cu curbura spațiu-timpului constă de fapt în legarea geometriei de fizică. Elementul principal al teoriei lui Einstein constă în faptul că proprietățile spațiu-timpului sunt determinate de prezența materiei în mișcare.

2.1. Elemente de geometrie diferențială și de Teoria Relativității Generale

Obiectivul principal în topologia și geometria diferențială îl constituie studiul proprietăților geometrice și topologice ale varietăților diferențiabile și ale varietăților diferențiabile înzestrate cu diverse structuri geometrice.

Se poate afirma că geometria diferențială constituie limbajul modern al fizicii și matematicii. Ea include studii privind curbura spațiului și calculul unor ecuații diferențiale, având la bază noțiunea de p-formă [23]. Clasa p-formelor este formată din clasa tensorilor covarianți complet antisimetrice.

Prima ecuație Cartan de structură în reprezentare ordonată se scrie sub forma

$$d\omega^a = \Gamma_{[bc]}^a \omega^b \wedge \omega^c, \quad 1 \leq b < c \leq n, \quad (2.1)$$

în timp ce a doua are expresia

$$\mathbb{R}_{ab} = d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma_{cb}, \quad 1 \leq b < c \leq n. \quad (2.2)$$

Ecuațiile Einstein din geometrodinamică, ecuații în care intervine atât câmpul gravitațional, reprezentat prin g , cât și sursa câmpului, desemnată de tensorul T_{ik} , se prezintă ca fiind

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = \kappa_0 T_{ik}. \quad (2.3)$$

În formulare covariantă pentru repere arbitrare ecuațiile (2.3) se scriu

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa_0 T_{ab}, \quad (2.4)$$

unde

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \quad (2.5)$$

desemnează tensorul Einstein, cu proprietatea (construcția celei de a doua identități Bianchi)

$$G_{;b}^{ab} = 0, \quad (2.6)$$

Aceasta implică

$$T_{;b}^{ab} = 0, \quad (2.7)$$

ceea ce reprezintă legea de conservare a tensorului impuls-energie; de aici rezultă și denumirea mai generală de tensor conservativ al materiei.

2.2. Soluții exacte consacrate ale ecuațiilor Einstein

Utilizarea formalismul Cartan din geometrie diferențială în exprimare liberă de coordonate conduce la determinarea, pentru clasa metricilor statice cu simetrie sferică, a componentelor esențiale ale tensorului Einstein în reperul tetradic pseudo-ortonormal considerat [8]. Aplicarea acestora prin intermediul ecuațiilor Einstein la cazul structurilor spațio-temporale vide și respectiv susținute de un câmp electrostatic sferic simetric conduce într-o manieră unitară la soluțiile exacte de interes fizic, Schwarzschild și respectiv Reissner-Nordström [8].

Așa cum se știe cele două metrice Schwarzschild [65, 92] și Reissner-Nordström [65], fac parte din aceeași clasă, fiind descrise de ecuația

$$ds^2 = e^{-2f(r)} (dr)^2 + r^2 \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \right] - e^{2f(r)} (dt)^2, \quad (2.8)$$

unde r este coordonata de tip radial, iar $f: R_+ \rightarrow R$ este o funcție reală de clasă cel puțin C^2 . Baza duală tetradic pseudo-ortonormală peste secțiunile fibratului cotangent $T^*(M)$ va fi definită de 1-formele [85]

$$\begin{aligned} \omega^1 &= e^{-f} dr, \quad \omega^2 = r d\theta, \\ \omega^3 &= r \sin \theta d\varphi, \quad \omega^4 = e^f dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

iar aplicarea operatorului diferențială exterioară (d) conduce la

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0, \quad d\omega^2 = \frac{e^f}{r} \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^3 &= \frac{e^f}{r} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{\text{ctg}\theta}{r} \omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^4 &= f' e^f \omega^1 \wedge \omega^4. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Din prima ecuație Cartan (2.1) rezultă coeficienții esențiali de conexiune

$$\begin{aligned} \Gamma_{212} = \Gamma_{313} &= \frac{e^f}{r}, \\ \Gamma_{323} &= \frac{\text{ctg}\theta}{r}, \quad \Gamma_{414} = -f' e^f, \end{aligned} \quad (2.11)$$

și 1-formele de conexiune ($\Gamma_{.b}^a = \Gamma_{.bc}^a \omega^c$),

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= -\frac{e^f}{r} \omega^2, \quad \Gamma_{13} = -\frac{e^f}{r} \omega^3, \\ \Gamma_{14} &= f' e^f \omega^4, \quad \Gamma_{23} = -\frac{\text{ctg}\theta}{r} \omega^3, \\ \Gamma_{24} &= \Gamma_{34} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Din al doilea set al ecuațiilor Cartan de structură se obțin ca algebric esențiale numai următoarele 2-forme de curbură [85],

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_{12} &= -\frac{1}{r} f' e^{2f} \omega^1 \wedge \omega^2, \quad \mathbb{R}_{13} = -\frac{1}{r} e^{2f} \omega^1 \wedge \omega^3, \\
\mathbb{R}_{14} &= (f'' + 2f') e^{2f} \omega^1 \wedge \omega^4, \quad \mathbb{R}_{24} = \frac{f'}{r} e^{2f} \omega^2 \wedge \omega^4, \\
\mathbb{R}_{34} &= \frac{f'}{r} e^{2f} \omega^3 \wedge \omega^4, \quad \mathbb{R}_{23} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{2f}) \omega^2 \wedge \omega^3,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

respectiv componentele tensorului Riemann

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= -\frac{f'}{r} e^{2f}, \quad R_{1313} = -\frac{1}{r} f' e^{2f}, \\
R_{1414} &= (f'' + 2f'^2) e^{2f}, \quad R_{2424} = \frac{f'}{r} e^{2f}, \\
R_{3434} &= \frac{f'}{r} e^{2f}, \quad R_{2323} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{2f}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

În aceste condiții pentru tensorul Ricci $R_{ab} = R_{.acb}^c$, se obțin următoarele elemente

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{2f'}{r} e^{2f} - (f'' + 2f'^2) e^{2f}, \\
R_{22} &= R_{33} = -\frac{2f'}{r} e^{2f} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2f}), \\
R_{44} &= \frac{2f'}{r} e^{2f} + (f'' + 2f'^2) e^{2f},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

care conduc la scalarul de curbură $R = g^{ik} R_{ik}$,

$$R = -\frac{8f'}{r} e^{2f} - 2(f'' + 2f'^2) e^{2f} + \frac{2}{r^2} (1 - e^{2f}), \tag{2.16}$$

și la următoarele componente algebric esențiale ale tensorului Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \text{ [85]},$$

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{2f'}{r} e^{2f} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{2f}), \\
G_{22} &= G_{33} = \frac{2f'}{r} e^{2f} + (f'' + 2f'^2) e^{2f}, \\
G_{44} &= -\frac{2f'}{r} e^{2f} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2f}).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

În cazul metricii Schwarzschild, avem satisfăcută condiția

$$e^{2f(r)} = 1 - \frac{2m}{r}, \tag{2.18}$$

ceea ce face ca (2.17) să se reducă la

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = 0, \tag{2.19}$$

exprimând spațiu-timpul vid. În cazul metricii Reissner-Nordström avem îndeplinită forma

$$e^{2f(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (2.20)$$

ceea ce permite scrierea componentelor tensorului conservativ impuls-energie [85],

$$T_{11} = -\frac{1}{2}F_{14}^2, \quad (2.21)$$

$$T_{22} = T_{33} = T_{44} = \frac{1}{2}F_{14}^2.$$

Legătura dintre sarcina electrică geometrică (q) și sarcina raționalizată (Q), este redată prin

$$q = \sqrt{\frac{\kappa_0}{2}} Q. \quad (2.22)$$

Soluția Schwarzschild exprimă spațiu-timpul vid din jurul unui corp (static) masiv sferic simetric care nu se rotește. O gaură neagră static irotațională și neutră electro-magnetic este descrisă de metrica Schwarzschild.

Soluția Reissner-Nordström descrie proprietățile geometriei Lorentziene a spațiu-timpului din jurul unui corp static, sferic simetric, încărcat electric, fără spin sau dipol magnetic. O gaură neagră încărcată electric, Reissner-Nordström, are două orizonturi.

Capitolul III

COSMOLOGII ROBERTSON-WALKER ȘI

TEORIA UNIVERSULUI FIERBINTE

Introducere

Cercetările referitoare la cele trei forțe fundamentale (nucleare tari, electromagnetice, nucleare slabe) au condus la apariția mării teorii unificate (grand unified theory - GUT), teorie care prezice că la energii extrem de ridicate (10^{14} GeV) forțele respective se contopesc într-un singur câmp. Dincolo de teoria GUT, se fac eforturi de a include și ultima forță într-o teorie a totului. Apare așadar noțiunea de string, frecvența vibrațiilor acestei extrem de mici entități cu extensiune liniară (posibil de ordinul lungimii Planck) determinând existența particulelor fundamentale din natură, precum și teoria M, în care stringurile operează într-o lume cu 11 dimensiuni. Așadar, toate teoriile de string prezic existența unor grade de libertate care sunt uzual descrise ca fiind extradimensiuni.

3.1. Metrica Robertson-Walker

În anii '30, Robertson și Walker realizează o unificare a modelelor cosmologice într-o geometrodinamică bazată pe Principiul Cosmologic: *La scară largă, universul arată la fel pentru orice pereche de observatori simultani.*

Clasa cuprinde toate modelele cosmologice omogene și izotrope purtând numele de cosmologii Robertson-Walker, modelele prezentând un grup de mișcare, subvarietățile putând fi hiperboloid H^3 (parametrul de curbură $k=-1$), spațiul real tridimensional R^3 ($k=0$), precum și sfera tridimensională S^3 ($k=1$).

Forma generală a metricii pentru spațiu-timpul $M_4 = N_3 \times R$ (omogen și izotrop) cu $N_3 = \{H^3, R^3, S^3\}$ este

$$ds_k^2 = a^2(t) dl_k^2 - (dt)^2. \quad (3.1)$$

Un astfel de spațiu se numește spațiul Robertson-Walker [4], iar spațiul Minkowski, spațiul de Sitter și spațiul anti-de Sitter sunt cazuri particulare ale acestuia. Funcția $a(t): R \rightarrow R_+$ poartă numele de funcție de scală putând fi interpretată ca o soluție exactă a ecuațiilor de câmp Einstein [65, 76]

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa_0 T_{ab}. \quad (3.2)$$

Având în vedere aceste elemente, spațiu-timpul poate fi descris de metrica Robertson-Walker sau Friedmann-Robertson-Walker scrisă în forma [4]

$$ds^2 = a_0^2 e^{2f(t)} \left\{ \frac{(dr)^2}{1-kr^2} + r^2 \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \right] \right\} - (dt)^2, \quad (3.3)$$

unde funcția de scală este scrisă ca

$$a(t) = a_0 e^{f(t)}, \quad (3.4)$$

a_0 desemnând un parametru de lungime iar $f: R \rightarrow R$ primitiva funcției Hubble

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{df}{dt}. \quad (3.5)$$

Utilizarea formalismului Cartan permite scrierea componentelor tensorului Einstein sub forma

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= - \left[2 \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right) + 3 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a_0^2 e^{2f}} \right] \delta_{\alpha\beta}, \\ G_{44} &= 3 \left[\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a_0^2 e^{2f}} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2. Modelul fundamental al tensorului conservativ al materiei la scară cosmologică

La scală foarte mare tensorul impuls-energie T_{ab} corespunzător materiei în spațiu-timpul Robertson-Walker este descris de formula [4]

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}, \quad (3.7)$$

caracteristică materiei obișnuite, privită ca un fluid cosmologic perfect a cărui densitate totală este ρ și presiune p . Mărimile $u_a = g_{ab} \omega^b \frac{dx^i}{d\sigma}$, unde σ este timpul propriu, reprezintă componentele covariante ale câmpului 4-vitezelor din fluid. Ecuația (3.7) trebuie completată cu expresia (ecuația de stare)

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (3.8)$$

unde γ joacă rolul coeficientului politropic și ia valorile

$$\gamma = 0 \rightarrow \text{vid fals},$$

$$\gamma = 1 \rightarrow \text{praf cosmologic},$$

$$\gamma = 4/3 \rightarrow \text{radiație termalizată},$$

$$\gamma = 2 \rightarrow \text{materie rigidă (stiff matter)}.$$

(3.9)

În cazul în care parametrul de curbură este $k = 0$, metrica RW are expresia

$$ds^2 = e^{2f(t)} \left[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \right] - (dt)^2, \quad (3.10)$$

conducând la scrierea componentele esențiale ale tensorului Einstein sub forma

$$\begin{aligned} G_{11} = G_{22} = G_{33} &= -(2f'' + 3f'^2), \\ G_{44} &= 3f'^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Revenind la metrica RW al cărei parametru de curbură este diferit de zero, ecuațiile de câmp Einstein (cu constantă cosmologică) pentru materie cosmologică obișnuită, aflată în repaus local, scrise într-un reper tetradic pseudo-ortonormal, au forma

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right) + 3 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a_0^2 e^{2f}} - \Lambda &= -\kappa_0 (\gamma - 1) \rho, \\ 3 \left[\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a_0^2 e^{2f}} \right] - \Lambda &= \kappa_0 \rho, \end{aligned} \quad (3.12)$$

de unde se observă strânsa legătură cu ecuația

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\gamma \left(\frac{df}{dt} \right) \rho = 0, \quad (3.13)$$

ce reprezintă o consecință a ecuației de mișcare

$$T^{ab}_{;b} = 0, \quad (3.14)$$

exprimând legea de conservare a tensorului impuls-energie pentru fluidul cosmologic perfect în reper pseudo-ortonormal co-mobil.

3.3. Proprietățile unei integrale prime a modelelor de univers închis cu constantă cosmologică

Metrica Friedmann-Robertson-Walker constituie o soluție exactă a ecuațiilor de câmp Einstein din Relativitatea Generală; ea descrie un univers omogen, izotrop care se contractă sau se află în expansiune. Pe lângă acestea, metrica presupune o dependență de timp a componentelor spațiale, scrisă în forma [53, 101]

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) \right], \quad (3.15)$$

echivalentă cu expresia (3.3) unde, de această dată R reprezintă factorul de scală. Utilizarea formalismului Cartan conduce la forma tensorului Ricci cu elementele esențiale

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = 2 \left[\frac{k}{R^2} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] + \frac{\ddot{R}}{R}, \quad (3.16)$$

$$R_{44} = -3 \frac{\ddot{R}}{R},$$

curbura scalară fiind dată de

$$R = 6 \left[\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R} \right], \quad (3.17)$$

iar componentele esențiale ale tensorului Einstein fiind de tipul [101],

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = - \left(\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2 \frac{\ddot{R}}{R} \right), \quad (3.18)$$

$$G_{44} = 3 \left(\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right).$$

Acestea permit scrierea ecuațiilor Einstein cu constantă cosmologică sub forma

$$\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2 \frac{\ddot{R}}{R} = \Lambda - 8\pi G\rho, \quad (3.19)$$

$$3 \left(\frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) - \Lambda = 8\pi G\rho.$$

Corespunzător, ecuația Friedmann, sau cea a parametrului Hubble H , se reduce la [101, 75]

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.20)$$

ecuația finală, necesară clasificării modelelor cosmologice omogene și izotrope, fiind cea a conservării energiei

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{R}}{R} (\rho + p). \quad (3.21)$$

În cele ce urmează, suntem interesați de universul dominat de radiație, respectiv materie, deoarece, conform teoriei Big-Bang, universul „și-a petrecut” cea mai mare parte din timp în cele două perioade. În ambele cazuri, vom lucra în ipoteza $\Lambda = 0 = k$.

În cazul *universului dominat de radiație*, ecuația de stare ce leagă presiunea de densitatea radiației libere din univers [75], este

$$p = \rho/3, \quad (3.22)$$

iar utilizând ecuația Friedmann găsim dependența [101, 75]

$$R \propto t^{1/2}. \quad (3.23)$$

În cazul al doilea, când atenția este focalizată asupra *materiei ce domină Universul*, trebuie respectate condițiile [75],

$$p = 0, \quad \rho \neq 0. \quad (3.24)$$

astfel, dependența factorului de scală devenind [101, 75]

$$R \propto t^{2/3}. \quad (3.25)$$

În continuare, vom examina sistematic, mai în detaliu, clasa modelelor FRW, axându-ne în particular pe cele două cazuri, universul dominat de radiație, respectiv materie. Pentru început se va defini cantitatea [75]

$$Q = \frac{3k}{R^2} - 8\pi G\rho, \quad (3.26)$$

legată de constanta cosmologică și de parametrul Hubble prin

$$Q = \Lambda - 3H^2, \quad (3.27)$$

ceea ce transformă expresia ecuației Friedmann (3.20) în

$$\frac{\dot{R}}{R} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda - Q}{3}}, \quad (3.28)$$

relație ce indică faptul că această cantitate Q trebuie să respecte condiția $Q \leq \Lambda$. Dacă se ia în considerare dependența densității de radiație, respectiv a densității de materie în funcție de factorul de scală ($\rho \propto R^{-4}$ și $\rho \propto R^{-3}$) ecuația (3.26) devine [101],

$$Q_1 = \frac{3k}{R^2} - \frac{8\pi G}{R^4}, \quad (3.29)$$

$$Q_2 = \frac{3k}{R^2} - \frac{8\pi G}{R^3},$$

echivalentă cu expresia

$$Q = \frac{3k}{R^2} - \frac{\varepsilon}{R^{3\gamma}}, \quad (3.30)$$

unde $\varepsilon = 8\pi\rho_0 \left(\frac{a_0}{M_P} \right)^2$. Pentru un parametru de curbură egal cu unitatea

$k=1$, am fost interesați de dependența lui Q în funcție de factorul de scală R , pentru acele cazuri în care valoarea coeficientului politropic este 1 (praf

cosmologic), respectiv $4/3$ (radiație termalizată), dependență ce este redată de figurile de mai jos, [101]. Pe lângă aceste elemente, am determinat locurile geometrice ale punctelor de maxim în planul (Q, R) , pentru $k=1$, condiția $\frac{dQ}{dR} = 0$, făcând posibilă scrierea pentru $\gamma = 1$ și respectiv $\gamma = 4/3$ a relațiilor [101],

$$Q_*(r_*) = \frac{1}{r_*^2},$$

$$Q_*(r_*) = \frac{3/2}{r_*^2}.$$
(3.31)

Având toate elementele necesare, figura 3.1 reprezintă evoluția lui $Q(R)$ pentru praf cosmologic, în timp ce figura 3.2 indică aceeași dependență, dar pentru radiația termalizată, ambele cazuri fiind studiate pentru un parametru de curbură egal cu unitatea, [101]. Când parametrul de curbură este pozitiv $k=1$, primele valori ale lui Q sunt tot negative, apropiate de $-\infty$, [9]. Pe măsură ce factorul de scală crește, Q înregistrează un maxim, însă pentru $R \rightarrow \infty$, Q scade monoton până la valoarea $Q = 0$.

În figura 3.3 s-a trasat dependența lui Q în funcție de factorul de scală pentru cele două cazuri, putându-se remarca, că pentru un anume Q , respectiv Q_3 , maximele acestora tind să aibă aceeași valoare. Prin urmare este posibil ca la un moment dat din trecut, în istoria universului, cantitatea Q corespunzătoare radiației termalizate să fi fost comparabilă cu cea a prafului cosmologic, moment caracteristic în teoriile Big-Bang și denumit epoca de recombinare (era decuplării) [53, 101].

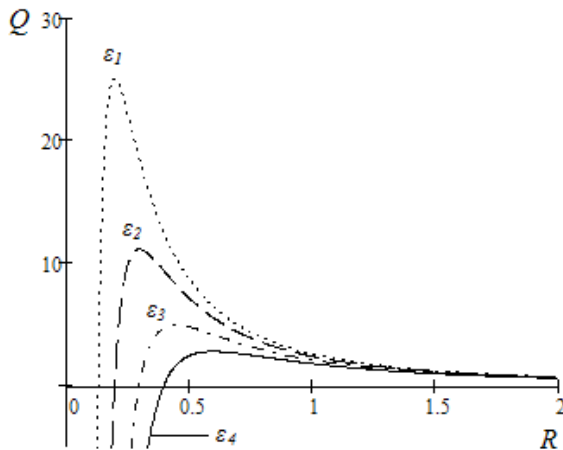


Fig. 3.1 Reprezentare grafică $Q(R)$ pentru $k=1$, $\gamma=1$, $\varepsilon_1=0.4$, $\varepsilon_2=0.6$, $\varepsilon_3=0.9$, $\varepsilon_4=1.2$

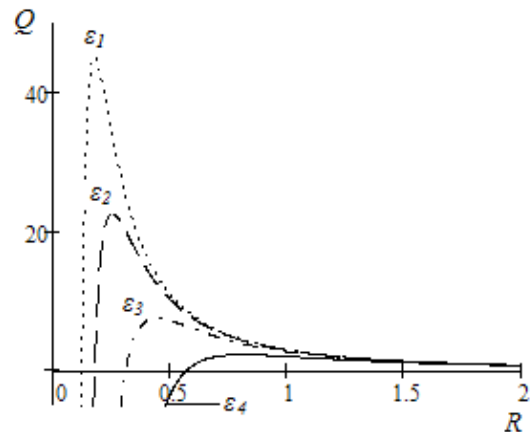


Fig. 3.2 Reprezentare grafică $Q(R)$ pentru $k=1$, $\gamma=4/3$, $\varepsilon_1=0.05$, $\varepsilon_2=0.1$, $\varepsilon_3=0.3$, $\varepsilon_4=1$

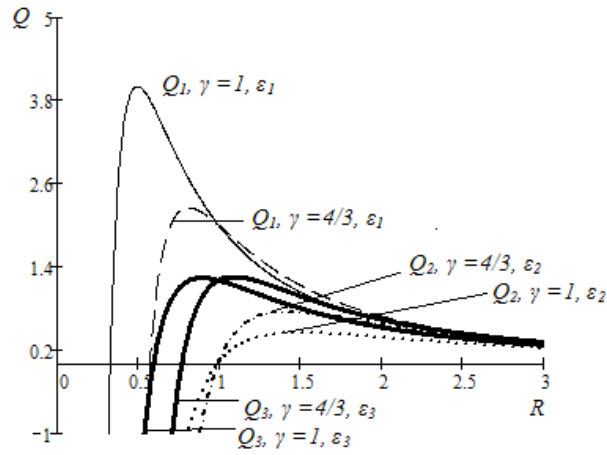


Fig. 3.3 Reprezentare grafică $Q(R)$ pentru
 $k = 1$; $\gamma = 1$; $4/3$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 1.8$

3.4. Aspecte geometrice fundamentale în cosmologii Robertson-Walker neomogene

Metrica Starobinsky generalizează metrica Robertson-Walker (cazul $k = 0$) pentru includerea geometrică a perturbațiilor scalare, fiind dată de

$$ds^2 = e^{2F(x^i)} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (dt)^2, \quad i = \overline{1,4}, \quad (3.32)$$

exponențiala având forma

$$e^F = e^{f+h}, \quad (3.33)$$

$h(x)$ fiind o funcție suplimentară numită potențial gravitațional, iar funcția $F(x^i)$ se prezintă ca

$$F(\vec{x}, t) = f(t) + h(x). \quad (3.34)$$

Formalismul Cartan ne-a permis determinarea componentelor tensorului Einstein, scrise sub forma

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left[(F_{|1})^2 + (F_{|2})^2 + (F_{|3})^2 \right] + F_{|22} + F_{|33} - 2F_{|44} - 3(F_{|4})^2, \\ G_{22} &= \left[(F_{|1})^2 + (F_{|2})^2 + (F_{|3})^2 \right] + F_{|11} + F_{|33} - 2F_{|44} - 3(F_{|4})^2, \\ G_{33} &= \left[(F_{|1})^2 + (F_{|2})^2 + (F_{|3})^2 \right] + F_{|11} + F_{|22} - 2F_{|44} - 3(F_{|4})^2, \\ G_{12} &= -F_{|21}, \quad G_{13} = -F_{|31}, \quad G_{14} = 2 \left[-F_{|14} - F_{|1} F_{|4} \right], \\ G_{23} &= -F_{|23}, \quad G_{24} = 2 \left[-F_{|24} - F_{|2} F_{|4} \right], \quad G_{34} = 2 \left[-F_{|34} - F_{|3} F_{|4} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Metrica Starobinsky reprezintă baza geometrodinamică a generalizării modelului inflaționist, în vederea înțelegerii formării structurilor.

Capitolul IV UNIVERSUL TIMPURIU

Introducere

Observațiile cosmologice au arătat că partea spațială a universului este aproape plată, $k=0$, confirmând multe dintre predicțiile teoriei inflaționiste. Inflația propune existența unei perioade de început din istoria universului în care factorul de scală, ce descrie mărimea sa, se află într-un proces de accelerare, acest fapt conducând la o expansiune rapidă exponențială a universului. Mai mult, teoria inflației completează teoria universului fierbinte (Big-Bang), având o deosebită importanță asupra „netezirii” neomogenităților, anizotropiei și curburii spațiu-timpului. Așadar, teoria inflației este una a condițiilor inițiale. Pentru a obține procesul inflaționist este nevoie de un „material” cu o proprietate neobișnuită, și anume, cu presiune negativă, universul fiind unul de tip de Sitter. Un astfel de „material” este câmpul scalar. Deși nu au fost încă observate cuantele sale (particulele Higgs), ele sunt utilizate în Modelul Standard, astfel de particule fiind responsabile de ruperea spontană a simetriilor interne. Câmpul scalar efectiv responsabil de procesul inflației se numește inflaton.

Inflația se apropie de sfârșit când parametrul Hubble începe să scadă foarte rapid, energia stării de vid fals fiind transformată în energie termică, universul devenind foarte fierbinte. Din acest moment evoluția universului este descrisă de teoria universului fierbinte.

În dezvoltarea sa, teoria inflației a implicat mai multe modele, astăzi inflația haotică fiind scenariul acceptat. Termenul de inflație haotică a fost propus de Linde în 1983, realizând că inflația este posibilă pentru potențiale care pot crește nemărginit, neavând un maxim [82]. Cel mai simplu este potențialul $V(\varphi) \sim \varphi^n$. Linde a arătat că pentru a avea inflație, câmpul trebuie să înceapă procesul de slow-roll de la valori foarte mari $\varphi \geq M_P$.

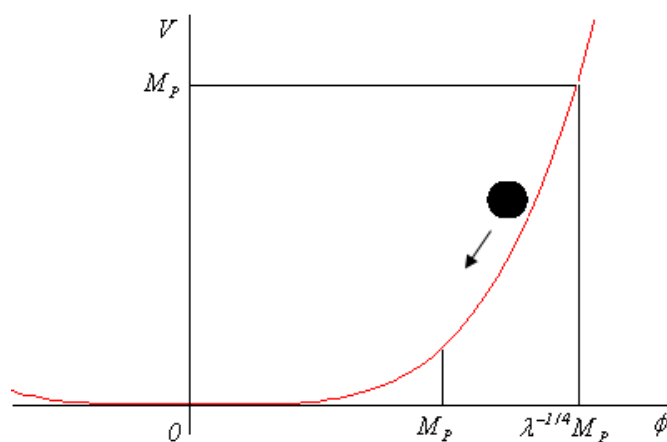


Fig. 4.1 Evoluția câmpului scalar omogen φ în cadrul teoriei $V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \varphi^4$

În momentul în care câmpul φ scade suficient, apropiindu-se ca valoare de ordinul masei Planck, procesul de rolling down al câmpului către minimum potențialului efectiv, nu mai poate fi oprit. Din acest moment câmpul φ începe să oscileze în jurul minimumului lui $V(\varphi)$, energia lui fiind transferată particulelor create, tocmai ca rezultat al acestor oscilații. Particulele create suferă ciocniri unele cu celelalte, ajungându-se la o stare de echilibru termodinamic, cu alte cuvinte universul începe să se încălzească.

4.1. Fluctuații cuantice și procese de generare în timpul inflației

În ultimele decenii, un interes deosebit a fost acordat fenomenului creării cuantice a particulelor. În acest context, am fost interesați de coeficienții Bogolubov și crearea de particule într-un univers quasi-de Sitter, atenția fiind focalizată asupra particulelor scalare, descrise de ecuația Gordon, scrisă ca o superpoziție de moduri ortonormale, [81, 32]. Așadar, atenția este focalizată asupra fluctuațiilor unui câmp scalar massless în timpul inflației haotice, chiar înainte de perioada de reîncălzire. Am pus în evidență fenomenul generării perechilor de particule, descris prin intermediul coeficienților Bogolubov și am calculat densitatea de particule, respectiv energia corespunzătoare acestora, [32]. O consecință suplimentară a tehnicii dezvoltate ne permite, pentru cazul particulelor ultrarelativiste, să determinăm variația absolută a câmpului scalar implicat precum și componentele tensorului impuls-energie, [20]. După cum se știe, sectorul staționar ($k = 0$) al universului de Sitter este descris de metrica [32]

$$ds^2 = e^{2\lambda t} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (dt)^2, \quad (4.1)$$

unde de această dată $\lambda \in \mathbb{R}_+$ este parametrul Hubble, ecuația Klein-Gordon pentru un câmp scalar masiv Φ fiind

$$\Phi_{,tt} + 3\lambda\Phi_{,t} + m_0^2\Phi - e^{-2\lambda t} \Delta\Phi = 0, \quad (4.2)$$

purtând numele de ecuația Gordon în universul de Sitter, ecuație în care termenul al doilea desemnează frecarea cosmologică iar ultimul pune în evidență „expansiunea” cosmologică a neomogenităților. Pentru rezolvarea ecuației diferențiale (4.2) alegem o soluție de forma [32]

$$\Phi = \Phi(\vec{x}, t) = T_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (4.3)$$

obținând pentru amplitudinea oscilațiilor temporale, dependența [32]

$$T = e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \left\{ H_{\nu}^{(1)}(ke^{-\lambda t}), H_{\nu}^{(2)}(ke^{-\lambda t}) \right\}, \quad (4.4)$$

în care

$$H_{\nu}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi k z}} e^{ikz}, \quad H_{\nu}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi k z}} e^{-ikz}. \quad (4.5)$$

Revenind la ecuația Gordon pentru un câmp scalar masiv (4.2) considerăm soluția ca o superpoziție de moduri ortonormale [81, 32],

$$\Phi(x) = \int d^3p \left[c(\vec{p}) u_{\vec{p}}(x) + c^+(\vec{p}) \bar{u}_{\vec{p}}(x) \right], \quad (4.6)$$

unde $c(\vec{p})$ desemnează operatorul de anihilare al unei particule în starea de impuls \vec{p} , $c^+(\vec{p})$ - operatorul de creare a unei particule în starea de impuls \vec{p} , $u_{\vec{p}}(x)$ - modul propriu ortonormal de frecvență pozitivă iar $\bar{u}_{\vec{p}}(x)$ - modul propriu ortonormal de frecvență negativă. Modurile proprii ortonormale respectă condiția

$$(u_{\vec{p}'}, u_{\vec{p}}) \triangleq i \int (\bar{u}_{\vec{p}'} u_{\vec{p},t} - \bar{u}_{\vec{p},t} u_{\vec{p}}) \sqrt{-g} d^3x. \quad (4.7)$$

prin urmare, modurile proprii ortonormale de frecvență pozitivă, respectiv negativă pot fi scrise ca [32]

$$\begin{aligned} u_{\vec{p}}(x) &= N_{\vec{p}} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} H_v^{(1)} \left(\frac{|\vec{p}|}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \\ \bar{u}_{\vec{p}}(x) &= N_{\vec{p}} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} H_v^{(2)} \left(\frac{|\vec{p}|}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ceea ce face ca în cazul particulelor ultrarelativiste, pentru modul de frecvență pozitivă să se identifice noua formă [32]

$$u_{\vec{p}}(x) = -\frac{(4\pi)^{-1}}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{3}{2}\lambda t} H_{3/2}^{(1)} \left(\frac{|\vec{p}|}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \exp \left[i \left(\vec{p} \cdot \vec{x} - \frac{p}{\lambda} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Generarea perechilor de particule este legată de coeficienții Bogolubov exprimați prin relația

$$\beta_{\vec{p}'\vec{p}}(t) = (v_{\vec{p}'}, \bar{u}_{\vec{p}}) = i \int (\bar{v}_{\vec{p}'} \bar{u}_{\vec{p},t} - \bar{v}_{\vec{p},t} \bar{u}_{\vec{p}'}) d^3x, \quad (4.10)$$

iar efectuarea calculelor utilizând (4.9) precum și modurile minkowskiene

$$v_{\vec{p}}(x) = \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \text{ conduce la expresia [32],}$$

$$\begin{aligned} \beta_{\vec{p}'\vec{p}}(t) &= -i \frac{(4\pi)^{-1} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}' + \vec{p})}{(32\pi^3 \lambda |\vec{p}'|)^{1/2}} e \left[i \left(|\vec{p}'| t + \frac{|\vec{p}'|}{\lambda} \right) \right] \cdot e^{-\frac{3}{2}\lambda t} \cdot \\ &\left\{ \frac{d}{dt} \left[H_v^{(2)} \left(\frac{|\vec{p}|}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right] - \left(\frac{3}{2} \lambda + i |\vec{p}'| \right) H_v^{(2)} \left(\frac{|\vec{p}|}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplicând ultima relație cu conjugata sa complexă, rezultă funcția densității spectrale la orice moment cosmic „ t ” pentru particulele create de impuls „ \vec{p} ”, de forma

$$f_{\vec{p}}(t, \lambda) = \frac{\lambda^2}{32\pi^3 p^2 a^2} + \frac{1}{32\pi^3 a^2} - \frac{1}{16\pi^3 a^3} + \frac{1}{32\pi^3 a^4}, \quad (4.12)$$

cu $a = e^{\lambda t}$, funcția de scală. Având în vedere toate elementele, expresia densității de particule și respectiv a densității de energie corespunzătoare acestora este dată [32]

$$n_{\beta}(t) = \frac{g}{8\pi^2} e^{-2\lambda t} \int_0^{\infty} \left[\lambda^2 + p^2 (1 - e^{-\lambda t})^2 \right] f_{\beta}(p) dp, \quad (4.13)$$

$$w_{\beta}(t) = \frac{g}{8\pi^2} e^{-2\lambda t} \int_0^{\infty} p \left[\lambda^2 + p^2 (1 - e^{-\lambda t})^2 \right] f_{\beta}(p) dp.$$

Considerând în continuare cazul universului de Sitter pentru particule ultrarelativiste și pornind de la amplitudinea fluctuațiilor câmpului scalar [32]

$$\langle \Phi^2(x) \rangle = \int d^3 \vec{p}' d^3 \vec{p} \left(\langle c_{\vec{p}', c_{\vec{p}}}^+ \rangle u_{\vec{p}'} \bar{u}_{\vec{p}} + \langle c_{\vec{p}', c_{\vec{p}}}^+ \rangle \bar{u}_{\vec{p}'} u_{\vec{p}} \right), \quad (4.14)$$

obținem variația absolută a câmpului (tipul clasic de fluctuații) de tipul [81, 32]

$$\delta \Phi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{2\pi t} = \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (4.15)$$

Pe de altă parte, lagrangeianul unui câmp scalar massless în sectorul staționar al universului de Sitter poate fi scris ca

$$\langle \mathcal{L}[\Phi] \rangle = - \int d^3 p \left(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{u}_{\vec{p},4} u_{\vec{p},4} - |\vec{p}|^2 e^{-2\lambda t} \bar{u}_{\vec{p}} u_{\vec{p}} \right). \quad (4.16)$$

legat de componentele tensorului energie-materie-impuls,

$$\langle T_{\alpha\beta} \rangle = \int d^3 p \left(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \left[\bar{u}_{\vec{p},4} u_{\vec{p},4} \delta_{\alpha\beta} - |\vec{p}|^2 e^{-2\lambda t} \left(\delta_{\alpha\beta} - 2 \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{|\vec{p}|^2} \right) \bar{u}_{\vec{p}} u_{\vec{p}} \right], \quad (4.17)$$

$$\langle T_{44} \rangle = \int d^3 p \left(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \left[\bar{u}_{\vec{p},4} u_{\vec{p},4} + |\vec{p}|^2 e^{-2\lambda t} \bar{u}_{\vec{p}} u_{\vec{p}} \right],$$

astfel încât, cu aceste considerente, presiunea pentru $t \rightarrow -\infty$, reducându-se la forma[32],

$$P = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(n_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda^2 + \frac{2}{3} p^2 e^{-2\lambda t} \right) \cdot e^{-2\lambda t}. \quad (4.18)$$

Coeficienții Bogolubov atașați fenomenului creării particulelor într-un sector staționar quasi-de Sitter prezent în evoluția universului, se pot așadar determina, pornind de la ecuația Klein-Gordon, pentru un câmp scalar masiv real, ecuație scrisă pentru stadiul de Sitter al universului, [32]. O altă metodă pentru a se ajunge la soluția (4.4) are ca punct de plecare tot metrica de Sitter, scrisă de această dată sub forma

$$ds^2 = e^{2Ht} \left[\delta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} - e^{-2Ht} (dt)^2 \right], \quad (4.19)$$

$H \in \mathbb{R}_+$ fiind de această dată parametrul Hubble, iar pentru un tratament mai larg în raport cu timpul conformal „ η ”, aceasta putând fi rescrisă ca

$$ds^2 = C^2(\eta) \left[\delta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} - (d\eta)^2 \right]. \quad (4.20)$$

unde $C(\eta)$ desemnează factorul de scală conformal de Sitter, făcându-se apel la legătura dintre timpul universal și cel conformal

$$d\eta = e^{-Ht} dt. \quad (4.21)$$

Astfel, ecuația Klein-Gordon pentru funcția dependentă de timp $T_{\vec{k}}(\eta)$, în sectorul staționar al universului de Sitter, scrisă în timp conformal este de tipul [102]

$$\frac{d^2 T_{\vec{k}}}{d\eta^2} + \frac{2H}{1-H\eta} \frac{dT_{\vec{k}}}{d\eta} + \left[|\vec{k}|^2 + \frac{m_0^2}{(1-H\eta)^2} \right] T_{\vec{k}} = 0. \quad (4.22)$$

În consecință, în reprezentare complexă, obținând două soluții liniar independente pentru funcția dependentă de timp $T_{\vec{k}}$, asemănătoare expresiei (4.4), scrise ca [102]

$$T_{\vec{k}} = s^{3/2} \left\{ H_v^{(1)}(s), H_v^{(2)}(s) \right\}, \quad (4.23)$$

în care $s = \frac{|\vec{k}|}{H} e^{-Ht}$, $v = \left[\frac{9}{4} - \left(\frac{m_0}{H} \right)^2 \right]^{1/2}$ iar $H_v^{(1,2)}$ desemnează funcțiile Hankel,

care pentru cazul câmpului massless, $m_0 = 0$, se prezintă sub forma dată de [81, 102] (setul complet ortonormal),

$$H_{3/2}^{(1)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{is} \left(1 + \frac{i}{s} \right), \quad H_{3/2}^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-is} \left(1 - \frac{i}{s} \right). \quad (4.24)$$

Urmând același raționament, redat de expresiile (4.6)-(4.11), pentru operatorul câmp scalar, modificarea apare la determinarea coeficienților Bogolubov $\beta_{\vec{p}, \vec{p}}$, deoarece avem noi funcții Hankel descrise de (4.24), fapt care face ca relația (4.11) să devină [102],

$$\begin{aligned} \beta_{\vec{p}, \vec{p}}(t) = & -i \frac{(4\pi)^{-1} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}' + \vec{p})}{(32\pi^3 H |\vec{p}'|)^{1/2}} \exp \left[i \left(|\vec{p}'| t + \frac{|\vec{p}|}{H} \right) \right] \cdot \sqrt{\frac{2H}{\pi |\vec{p}|}} \\ & \cdot e^{-Ht} \exp \left(-i \frac{|\vec{p}|}{H} e^{-Ht} \right) \left(i |\vec{p}'| - i |\vec{p}| e^{-Ht} + \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} H e^{Ht} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Prin urmare, densitatea volumică de particule de impuls $|\vec{p}|$, capătă forma

$$f_p(t) = \frac{1}{(2\pi)^3 \cdot 4 |\vec{p}|^2} \left[H^2 + |\vec{p}|^2 (1 - e^{-Ht})^2 e^{-2Ht} \right], \quad (4.26)$$

densitatea de particule și densitatea de energie corespunzătoare fiind acum exprimate prin [102]

$$\begin{aligned} n_\beta(t) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \left[H^2 + p^2 (1 - e^{-Ht})^2 e^{-2Ht} \right] f_\beta(p) dp, \\ w_\beta(t) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty p \left[H^2 + p^2 (1 - e^{-Ht})^2 e^{-2Ht} \right] f_\beta(p) dp, \end{aligned} \quad (4.27)$$

După cum se poate observa, la momentul inițial $t = 0$, densitatea de energie se reduce la

$$w_{\beta}(t) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{pH^2}{e^{\beta p} - 1} dp, \quad (4.28)$$

ceea ce indică faptul că atunci când parametrul Hubble este nul ($H=0$), procesul creării particulelor nu este prezent. Revenind la expresia densității de energie din (4.27), aceasta poate fi redată ca [102]

$$w_{\beta}(t) = \frac{H^2}{48\beta^2} + \frac{\pi^2}{120\beta^4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^4} \right), \quad (4.29)$$

unde

$$e^{Ht} = a. \quad (4.30)$$

După cum se poate observa din aceasta, găsim un termen cosmologic (primul termen), care poate explica expansiunea accelerată post-inflaționistă a universului observabil, un termen pozitiv al curburii (primul termen din paranteză), care poate indica faptul că trăim univers închis topologic, un praf „exotic” (al doilea termen din paranteză) legat de materia barionică lipsă din univers, și nu mai puțin important un termen al radiației termalizate, care poate fi necesar procesului de reîncălzire (după stadiul inflației haotice) [102]. Având în vedere toate aceste elemente, ecuațiile lui Einstein devin

$$2 \frac{d^2 f}{dt^2} + 3 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -\kappa_0 P, \quad (4.31)$$

$$3 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2} - \Lambda = \kappa_0 w_{\beta}(t),$$

pentru presiune găsindu-se forma [102],

$$P = -\frac{H^2}{48\beta^2} - \frac{\pi^2/360}{\beta^4 a^2} + \frac{\pi^2/360}{\beta^4 a^4}. \quad (4.32)$$

Analogia dintre interiorul găurii negre și spațiul de Sitter [81], permite scrierea

$$\frac{da}{dt} = \frac{H^2/M_p}{6\sqrt{2\pi}} \left[a^2 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.33)$$

studiul comportamentului asimptotic al factorului de scală, relevând pentru intervalul $0 < a \ll 1$, dependența

$$a(t) = \left(6\sqrt{5\pi} \right)^{-1/2} \sqrt{\underline{t}}, \quad \underline{t} = \frac{H^2}{M_p} t, \quad (4.34)$$

care susține stadiul radiației dominante în univers, în timp ce valorile mari ale factorului de scală, $a \gg 1$, implică

$$a = a_* \exp \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{12\pi} \underline{t} \right), \quad (4.35)$$

subliniind expansiunea accelerată a universului. Integrarea numerică a ecuației (4.33), scrisă de această dată ca [102]

$$\frac{da}{ds} = \left[a^2 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.36)$$

în raport cu noul parametru temporal

$$s = \frac{H^2 / M_P}{6\sqrt{2\pi}} t, \quad (4.37)$$

și împreună cu condiția inițială $0 < a(s=0) = a_0 \ll 1$, de exemplu $a_0 = 10^{-2}$, confirmă comportamentul mai sus menționat, punându-se în evidență o perioadă (fază) „îndelungată” care sugerează conexiunea dintre fluctuațiile coerente massless și contribuția termenului curburii, după cum se poate observa din figura 4.2, [102].

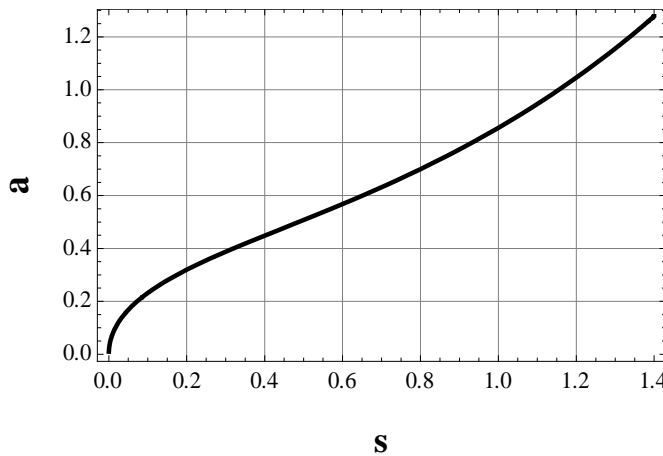


Fig. 4.2 Evoluția factorului de scală a în raport cu timpul cosmic s , descrisă de ecuația 4.36, pentru $a_0 = 10^{-2}$

Așadar, datorită prezenței orizontului de Sitter $d_H = H^{-1}$, și analogiei cu interiorul unei găuri negre, am ales temperatura ca fiind una de tip Hawking, $T_H = H / (2\pi)$, focalizându-ne asupra reacției (4.33), [102]. Observăm din aceasta, o eră dominantă a radiației, urmată de un amestec de fluctuații coerente ale unui câmp massless, finalizată cu o expansiune accelerată a universului.

Capitolul V

CONSECINȚE ALE PATOLOGIEI GLOBALE ÎN DEFORMAREA SPAȚIALĂ A FUNCȚIEI DE POTENȚIAL A UNEI METRICI DE CÂMP GALACTIC UNIFORM

Introducere

În ultimele decenii, analiza unor varietăți global patologice a schimbat imaginea noastră asupra gravitației, câmpurilor materiale și, nu în ultimul rând, asupra spațiu-timpului [13]. Din acest punct de vedere, subiecte

precum, stringuri cosmice, singularități dezgolite, varietăți Bianchi, izotropizări dinamice sau pereți topologici [123,125], s-au înscris în tematica celor mai prestigioase reviste de specialitate. Printre cele mai fascinante structuri care rezultă din TRG, găurile negre BTZ [2], au pus în evidență trăsături importante, cum ar fi curbele *timelike* închise (CTC- closed timelike curves) și/sau patologiile Taub-Nut. Cu ajutorul ecuațiilor Einstein putem avea acces la o serie de informații referitoare la configurații gravitaționale cu simetrii speciale, care prezintă proprietăți global-patologice.

5.1. Geometria modelului

Pentru investigarea structurilor spațio-temporale global patologice, considerăm o metrică aparținând clasei Bianchi VIII, soluție exactă a ecuațiilor lui Einstein cu surse materiale neconvenționale. Metrica studiată de noi este obiectul unor investigații recente [25], o astfel de structură spațio-temporală putând fi responsabilă de confinarea particulelor în universul Minkowskian [52, 40]. Considerăm forma

$$ds^2 = e^{2f(u,v)}(dx)^2 + e^{2g(u,v)}(dy)^2 - e^{2h(u,v)}dudv, \quad (5.1)$$

iar aplicarea formalismului Cartan conduce la tensorului Einstein cu următoarele componente

$$\begin{aligned} G_{11} &= -2(g_{|3}h_{|4} + g_{|34} + g_{|3}g_{|4}), G_{22} = -2(f_{|3}h_{|4} + f_{|34} + f_{|3}f_{|4}), \\ G_{33} &= -f_{|33} - (f_{|3})^2 + f_{|3}h_{|3} + g_{|3}h_{|3} - g_{|33} - (g_{|3})^2, \\ G_{44} &= -\left[(f_{|4})^2 + f_{|44} - f_{|4}h_{|4}\right] - \left[(g_{|4})^2 + g_{|44} - g_{|4}h_{|4}\right], \\ G_{34} &= f_{|34} + f_{|3}f_{|4} + f_{|3}h_{|4} + g_{|3}h_{|4} + g_{|34} + g_{|3}g_{|4} + f_{|3}g_{|4} + f_{|4}g_{|3}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cazul

$$\begin{aligned} f &= g = 0, \\ e^{h(z)}dz &= d\xi, e^{h(z)} = ch(\alpha\xi), \end{aligned} \quad (5.3)$$

ne ajută să găsim noua formă a metricii (5.1), de tip *hiperbolic* [103]

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - ch^2(\alpha z)(dt)^2, \quad (5.4)$$

pentru care tensorul Einstein are componentele nenule

$$G_{11} = G_{22} = \alpha^2. \quad (5.5)$$

În continuare, este necesar să găsim o sursă materială care să susțină o astfel de geometrie, tensorul total impuls-energie aferent fiind dat de expresia [1, 26],

$$T_{ab} = \mu X_a X_b + \rho u_a u_b + g_{ab}\Lambda, \quad (5.6)$$

exprimând o sursă materială combinată, formată din praf universal fixat pe un string global orientat după axa Oz, scufundat într-un mediu cu densitate de energie negativă și presiune pozitivă (egală ca valoare), ce invadează totul în jur.

Pentru a identifica proprietățile patologice ale metricii (5.4), se calculează geodezicele timelike pentru o particulă test, care se deplasează în acest univers [1]. Pentru $x, y = cst$, metrica (5.4) devine

$$d\sigma^2 = -ds^2 = ch^2(\alpha z)(dt)^2 - (dz)^2, \quad (5.7)$$

funcția Lagrange asociată fiind

$$\Phi = ch^2(\alpha z)(\dot{t})^2 - (\dot{z})^2 \equiv 1, \quad (5.8)$$

astfel încât ecuațiile Euler-Lagrange admit soluțiile,

$$\begin{aligned} z(\sigma) &= \frac{1}{\alpha} \ln \left[sh(\alpha z_0) \cos(\alpha \sigma) + \sqrt{sh^2(\alpha z_0) \cos^2(\alpha \sigma) + 1} \right], \\ t(\sigma) &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left[\frac{tg(\alpha \sigma)}{ch(\alpha z_0)} \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

unde $-\frac{\pi}{2\alpha} < \sigma < \frac{\pi}{2\alpha}$, care au fost investigate în [1]. Inspectând expresiile de mai sus, se poate observa că geodezicele nu pot fi extinse înainte de momentul $-\frac{\pi}{2\alpha}$ și nici nu pot continua, în viitor, după $\frac{\pi}{2\alpha}$, prezentând o *împrizonierare temporală*. Astfel, particula va parcurge întreaga sa geodezică, într-un timp propriu finit, fiind împrizonierată între aceste momente de timp universale, [103, 1].

5.2. Cuantificarea câmpului scalar și proprietăți termodinamice

În acest paragraf, considerăm un câmp scalar complex descris de ecuația Gordon, pe varietatea spațio-temporală cu metrica de tip hiperbolic (5.4), adică [36, 37]

$$ds^2 = \delta_{AB} dx^A dx^B + (dz)^2 - ch^2(\alpha z)(dt)^2.$$

Ecuația Klein-Gordon capătă forma explicită

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \alpha th(\alpha z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{ch^2(\alpha z)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - m_0^2 \varphi = 0, \quad (5.10)$$

ceea ce ne permite să luăm câmpul φ de forma

$$\varphi_\lambda(x^A, z, t) = F_\lambda(z) e^{i(p_A x^A - \omega t)}, \quad (5.11)$$

toate aceste elemente conducând la forma,

$$\frac{d^2 F_\lambda}{d\theta^2} + \left[\Omega^2 - \frac{\varepsilon_\perp^2}{\sin^2 \theta} \right] F_\lambda = 0. \quad (5.12)$$

În urma substituției $F_\lambda = \sqrt{\sin \theta} G_\lambda$, se obține, pentru G_λ chiar ecuația diferențială ale cărei soluții sunt funcțiile asociate Legendre $G_\lambda = P_l^m(\cos \theta)$, cu $m \in \mathbb{Z}$ și $|m| \leq l$, $l \in \mathbb{N}$, modurile de frecvență pozitivă ale câmpului φ , incluzând și constanta de normare N , devenind [36, 37],

$$u_{lmy}(x, y, \theta, t) = N \sqrt{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \times \exp \left\{ i \left[p_{\perp} (x \cos \gamma + y \sin \gamma) - \alpha \left(l + \frac{1}{2} \right) t \right] \right\}, \quad (5.13)$$

Analiza termodinamică a bozonilor de masă nulă permite scrierea funcției de partiție uniparticulă [36, 37]

$$Z = \sum_{l=1}^{\infty} g_l e^{-\beta \omega_l} = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot \exp \left[-\beta \alpha \left(l + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5.14)$$

a energiei libere

$$F \triangleq -\beta^{-1} \ln Z = \frac{2}{\beta} \ln \left[e^{\beta \alpha} - 1 \right] - \frac{\alpha}{2}, \quad (5.15)$$

respectiv a entropiei per particulă

$$S = 2 \left[\chi + \frac{\chi}{e^{\chi} - 1} - \ln(e^{\chi} - 1) \right], \quad \chi = \beta \alpha, \quad (5.16)$$

și după cum se poate observa, pentru $T = 0_+$, când $\chi \rightarrow \infty$, entropia devine

$$S(\chi \rightarrow \infty) = 2 \lim_{T \rightarrow 0_+} \left[\frac{\alpha}{T} e^{-\frac{\alpha}{T}} \right] = 0, \quad (5.17)$$

fiind în concordanță cu cel de-al treilea principiu al termodinamicii. Calculând derivata lui S , rezultă

$$\frac{dS}{d\chi} = -2 \frac{\chi e^{\chi}}{(e^{\chi} - 1)^2} < 0, \quad (5.18)$$

pentru toate valorile pozitive ale lui χ , ceea ce înseamnă că entropia per particulă scade monoton (pe măsură ce χ variază de la 0_+ la ∞) de la $+\infty$ la 0_+ , rămânând pozitivă în tot acest interval. În ipoteza temperaturilor mari sau a valorilor mici pentru α astfel încât $\chi \ll 1$, formulele de mai sus se transcriu sub forma [36, 37]

$$F = -\frac{\hbar \omega_0}{2} - 2kT \ln \frac{kT}{\hbar \omega_0}, \quad (5.19)$$

$$E = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 + 2kT.$$

Așadar, analiza noastră a presupus studiul universului descris metrica (5.1), identificând tensorul energie-impuls corespunzător acesteia. Focalizându-ne asupra metricii de tip hiperbolic (5.4), observăm că traiectoriile nul sunt prinse între două momente de timp universale, punându-se în evidență o așa-numită *împrizonierare temporală*. În cele din urmă, focalizându-ne asupra bozonilor de masă nulă într-o analiză termodinamică, scriem funcția de partiție uni-particulă, expresia energiei libere și a entropiei per particulă, expresie care nu vine în contradicție cu teorema lui Nerts.

5.3. Câmpul electrostatic: ecuația lui Poisson și forma celei mai generale soluții

Pentru a scrie ecuația Gauss-Poisson, pe metrica (5.4) am plecat de la ecuațiile Maxwell cu surse

$$\frac{1}{\sqrt{|-g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|-g|} F^{ik} \right) = j^i. \quad (5.20)$$

unde tensorul electromagnetic F^{ik} poate fi scris în termeni de potențial sub forma

$$F = A_{4,\alpha} dx^\alpha \wedge dt, \quad (5.21)$$

în care $A_4 \triangleq -\Phi = g_{44} V = -ch^2 (\alpha z) V$ [103], iar V desemnează potențialul electrostatic. În aceste condiții, relația (5.20) scrisă pe componente ne conduce la sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|-g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|-g|} g^{\alpha\beta} g^{km} F_{\beta m} \right) &= j^\alpha, \\ \frac{1}{\sqrt{|-g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{|-g|} g^{44} g^{km} F_{4m} \right) &= j^4. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pentru $m = k = \overline{1,3}$ în cea de-a doua ecuație și considerând problema corespunzătoare a vectorilor și valorilor proprii putem scrie

$$\left(\xi^2 + 1 \right) \frac{\partial^2 \psi_\lambda}{\partial \xi^2} + 4\xi \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \xi} + 2\psi_\lambda + \Delta_\perp \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda, \quad \xi = sh(\alpha z), \quad (5.23)$$

iar în urma aplicării metodei Laplace a separării variabilelor

$$\psi_\lambda(\zeta, \eta, \xi) = F_{\lambda X}(\xi) U_{\bar{X}}(\zeta, \eta), \quad (5.24)$$

rezultă așadar pentru funcția proprie $F_{\lambda X}(\xi)$, ecuația diferențială de ordinul doi [103]

$$x(1-x) \frac{d^2 F_{\lambda X}}{dx^2} + [2-4x] \frac{dF_{\lambda X}}{dx} - (2-x^2-\lambda) F_{\lambda X} = 0. \quad (5.25)$$

Comparând expresia anterioară cu ecuația diferențială a funcțiilor hipergeometrice [54], putem scrie modurile proprii sub forma

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda \bar{k}}(x, y, z) &= F \left[\frac{3}{2} - \sqrt{\lambda + \frac{|\bar{k}|^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{|\bar{k}|^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4}}, 2; \frac{1+ish(\alpha z)}{2} \right] e^{i(k_1 x + k_2 y)}, \\ \bar{\psi}_{\lambda \bar{k}}(x, y, z) &= F \left[\frac{3}{2} - \sqrt{\lambda + \frac{|\bar{k}|^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{|\bar{k}|^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4}}, 2; \frac{1-ish(\alpha z)}{2} \right] e^{-i(k_1 x + k_2 y)}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

unde $|\bar{k}|^2 = \delta^{AB} k_A k_B = \delta_{AB} k^A k^B \equiv (k_1)^2 + (k_2)^2$, ceea ce determină, în principiu, forma cea mai generală a potențialului contravariant al câmpului electrostatic,

$$V(x^\mu) = \int d^2k d\lambda \mu(\lambda) \left[C(\lambda, \vec{k}) \psi_{\lambda \vec{k}}(x^\mu) + \bar{C}(\lambda, \vec{k}) \bar{\psi}_{\lambda \vec{k}}(x^\mu) \right], \quad (5.27)$$

unde $(x^\mu)_{\mu=1,3} = (x, y, z)$.

În concluzie, pentru a determina forma cea mai generală a potențialului contravariant al câmpului electrostatic, exprimată de (5.27), am avut ca punct de plecare ecuațiile Maxwell cu surse. Analiza metricii de tip hiperbolic $g_{44} = -ch^2(\alpha z)$ au condus, în final, la identificarea modurilor proprii (5.26), sau a soluției ecuației Gauss-Poisson, și implicit la forma generală a potențialului electrostatic [103].

Capitolul VI EXTENSIUNI 5 DIMENSIONALE ALE DEFORMĂRILOR LORENTZIENE

Introducere

Starea fundamentală a unui sistem, sau starea de cea mai joasă energie, nu înregistrează o energie nulă, tocmai datorită existenței fluctuațiilor punctului de zero. Prin urmare, în timp au apărut metode de înlăturare a acestor infiniți, numite tehnici de renormare, cum ar fi cea din 1950 a lui Feynman, Schwinger și Tomonaga, urmată de teoriile Yang-Mills; în anii 1970 apare supersimetria, teorie care afirmă că spațiu-timpul prezintă dimensiuni suplimentare. După 1985, apare teoria supersimetrică a corzilor, corzile fiind apoi considerate obiecte ce pot fi extinse la mai mult de o dimensiune și în același timp soluții ale supersimetriei în 10 sau 11 dimensiuni [64]. Cele cinci teorii ale supercorzilor (echivalente cu supergravitația) reprezintă aspecte diferite ale aceleiași teorii, numită teoria M, care nu este pe deplin înțeleasă sau definitivată [66].

Existența dimensiunilor suplimentare mari ar fi echivalentă cu faptul că trăim într-o lume-membrană, o hiper-suprafață 4-dimensională într-un spațiu cu mai multe dimensiuni, materia și forțele care nu implică gravitație, fiind confinate pe aceasta.

6.1. Geometria deformării 5-dimensionale de scufundare a universului Einstein

În ultimul timp, teoriile de câmp pe varietăți curbe, precum și includerea gravitației în teoriile gauge ale particulelor elementare, au constituit subiecte de interes [9]. Pe de altă parte, s-a presupus că universul nostru este o membrană scufundată într-un spațiu-timp de dimensiune superioară, și s-a investigat rolul acestor dimensiuni.

În ce privește cercetările noastre, am presupus ca membrană 4D spațiu-timpul $S^3 \times R$, iar bozonii masivi evoluează într-un spațiu 5-

dimensional [38], observând că S^3 indică tocmai spațiul de Sitter, important în modelele de inflație. În cazul nostru, spațiul 5-dimensional este descris de metrica

$$ds_5^2 = e^{2f(z)} ds_4^2 + (dz)^2, \quad (6.1)$$

unde ds_4^2 desemnează metrica lorentziană de pe spațiu-timpul $S^3 \times R$

$$ds_4^2 = a^2 \left[(d\theta)^2 + \cos^2 \theta (d\alpha)^2 + \sin^2 \theta (d\beta)^2 \right] - (dt)^2, \quad (6.2)$$

cu $a = cst$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$, $x^4 = t$, factorul *warp* depinzând numai de extradimensiunea $x^5 = z$, [38]. Utilizarea aceluiași formalism Cartan ca și în teoriile 4-dimensionale, ne conduce la următoarele componente algebric esențiale ale tensorului Einstein 5D [38],

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \left[3f_{,55} + 6(f_{,5})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} \right] \delta_{\alpha\beta}, \\ G_{44} &= - \left[3f_{,55} + 6(f_{,5})^2 \right] + 3 \frac{e^{-2f}}{a^2}, \\ G_{55} &= 6(f_{,5})^2 - 3 \frac{e^{-2f}}{a^2}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

ecuațiile Einstein transformându-se în

$$\begin{aligned} 3f_{,55} + 6(f_{,5})^2 - \frac{e^{-2f}}{a^2} + \Lambda &= \kappa T_{\alpha\alpha}, \\ -3f_{,55} - 6(f_{,5})^2 + 3 \frac{e^{-2f}}{a^2} - \Lambda &= \kappa T_{44}, \\ 6(f_{,5})^2 - 3 \frac{e^{-2f}}{a^2} + \Lambda &= \kappa T_{55}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Deoarece nu există un câmp scalar care poate susține o astfel de geometrie, vom utiliza un fluid perfect, ecuațiile (6.4) reducându-se la

$$f_{,55} + \frac{2}{3} \frac{e^{-2f}}{a^2} = 0, \quad (6.5)$$

a cărei soluție este dată de funcția metrică

$$f(z) = \ln \left[\pm \frac{2}{\sqrt{6a}\sqrt{b}} \operatorname{sh}(\sqrt{b}z + C) \right], \quad (6.6)$$

unde a este raza sferei S^3 , iar b și C sunt constante de integrare. Cu toate aceste elemente, expresia factorului *warp* devine [38],

$$e^{2f(z)} = \frac{2}{3a^2b} \operatorname{sh}^2(\sqrt{b}z + C). \quad (6.7)$$

6.2. Dinamica 5-dimensională a câmpului scalar și spectrul maselor din „membrana” Einstein

Pentru a se evita singularitatea curburii, în teoriile 5D, gravitația trebuie să fie cuplată la un câmp scalar. În acest scop, au fost propuse modele de membrane, în prezența unui câmp scalar, factorul *warp* și funcțiile de undă fiind scrise cu ajutorul unui superpotențial, [5, 46]. Pentru un spațiu-timp descris de metrica (6.1), ecuația Gordon 5D, în reperul pseudo-ortonormal devine

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\sqrt{b}cth(\sqrt{bz}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{3}{2} \frac{a^2 b}{sh^2(\sqrt{bz})} \left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi = 2\mu^2 \varphi, \quad (6.8)$$

iar după separarea de variabilă

$$\varphi = F(\theta, \alpha, \beta, t) Z(z), \quad (6.9)$$

forma (6.8) ne conduce la următorul sistem de ecuații diferențiale necuplate [38],

$$\left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F - \frac{2}{3a^2} \frac{M^2}{b} F = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 4\sqrt{b}cth(\sqrt{bz}) \frac{\partial Z}{\partial z} + \left[\frac{M^2}{sh^2(\sqrt{bz})} - 2\mu^2 \right] Z = 0.$$

Căutând o soluție de forma $Z(w) = sh^{-3/2}(w)G(w)$, ajungem pentru G la ecuația diferențială

$$\frac{d^2 G}{dw^2} + cthw \frac{dG}{dw} - \left[\left(\varepsilon^2 + \frac{15}{4} \right) + \frac{(9/4) - \eta^2}{sh^2 w} \right] G = 0, \quad (6.11)$$

cele două soluții linear independente fiind funcțiile torului [54]

$$G(w) = \left\{ P_{l-\frac{1}{2}}^{m_l}(chw), Q_{l-\frac{1}{2}}^{m_l}(chw) \right\}. \quad (6.12)$$

Impunând ecuației (6.11) condițiile de cuantificare

$$\varepsilon^2 + \frac{15}{4} = l^2 - \frac{1}{4}, \quad (6.13)$$

$$\frac{9}{4} - \eta^2 = m_l^2,$$

ajungem la un spectru de tip Kaluza-Klein

$$2\mu^2 = (l-2)(l+2)b, \quad (6.14)$$

masa câmpului scalar de pe membrană fiind dată de expresia

$$m_*^2 = \frac{2}{3a^2} \frac{M^2}{b} = \frac{2}{3a^2} \left[\frac{9}{4} - m_l^2 \right], \quad (6.15)$$

unde $m_l \in \left\{ \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0 \right\}$. În aceste condiții, spectrul masei poate fi scris sub forma deosebit de sugestivă [38]

$$\tilde{m}_*^2 \in \left\{ 0, \frac{5}{36}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4} \right\}.$$

Prima valoare corespunde unui bozon massless, funcția de undă dependentă numai de extradimensiune fiind soluția ecuației (6.11) pentru cazul $\eta=0$ și $m_l = \pm 3/2$. Ultimele două valori corespund lui $m_l = \pm 1/2$, respectiv $m_l = 0$, pentru care masele sunt $m_* \sim \sqrt{2}/3$ și respectiv $m_* \sim 1/2$, unde $\sqrt{2}$ se absoarbe în valoarea masei bozonului Higgs, [38].

Cazul $m_l = 1$ pentru care $m_* \sim \sqrt{5}/6$ poate părea ciudat la prima vedere, dar el poate fi înțeles în lumina recentelor lucrări ale lui El Naschie, în care teoriile cuantice de câmp sunt reformulate pe un spațiu-timp fractalic. Considerând mezonul π ca fiind componenta fundamentală a particulelor compuse, se observă că spectrul maselor poate fi corelat cu dimensiunea fundamentală a spațiu-timpului El Naschie.

6.3. Teoria fermionilor în hiperspațiu (*bulk*). Forma extinsă a ecuației Dirac și modurile particulare de energie

Generalizând modelele existente [74], studiem cazul fermionilor cuplați minimal la un spațiu 5-dimensional, având drept membrane 4-dimensionale spațiu-timpul $S^3 \times R$, scriind ecuația Dirac pentru fermionii din *bulk*, descris de metrica (6.1) și de expresia factorului *warp* (6.7), [39]. Fermionii Dirac cuplați minimal cu gravitația din *bulk* sunt descriși de lagrangeianul

$$L = \bar{\Psi} \Gamma^a D_a \Psi, \quad (6.16)$$

unde matricele gamma pe spațiul curb sunt date de $\Gamma^a = \{ \Gamma^i = \gamma^i, \Gamma^z = \gamma^5 \}$.

Definim derivatele covariante prin [39],

$$D_i = e^{-f(z)} (L_i + \Sigma_i), \quad (6.17)$$

$$D_5 = \partial_5,$$

unde

$$\Sigma_i = S_i + \frac{1}{2} f_{,5} \gamma_i \gamma_5. \quad (6.18)$$

Ecuația Dirac este de forma

$$\Gamma^a D_a \Psi = 0, \quad a = \overline{1,5}, \quad (6.19)$$

ceea ce conduce la sistemul de ecuații diferențiale decuplate

$$\begin{aligned} (a) \quad & \gamma^i J_i \psi + M \psi = 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ (b) \quad & \gamma_5 (e^f \partial_z + 2f_{,z}) \zeta - M \zeta = 0, \end{aligned} \quad (6.20)$$

unde spinorul 5-dimensional a fost descompus în [39],

$$\Psi(x^i, z) = \psi(x^i) \zeta(z). \quad (6.21)$$

Prima ecuație din (6.20) descrie fermionii 4D pe spațiu-timpul $S^3 \times R$, iar cea de-a doua exprimă noile efecte ce apar în *bulk*, exclusiv datorate extradimensiunii. Pentru forma factorului *warp* (6.7) cu $C \rightarrow 0$, cea de-a doua ecuație a sistemului (6.20) este satisfăcută de soluția

$$\zeta_{R,L} = \exp\left[\frac{a\sqrt{6b}}{\text{sh}(\sqrt{bz})}\right] \left[\text{th}\frac{\sqrt{bz}}{2} \right]^{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}aM}, \quad (6.22)$$

descriind fermionii de chiralitate dreaptă respectiv stângă, pe extradimensiunea $x^5 = z$, reprezentați în figurile de mai jos [39].

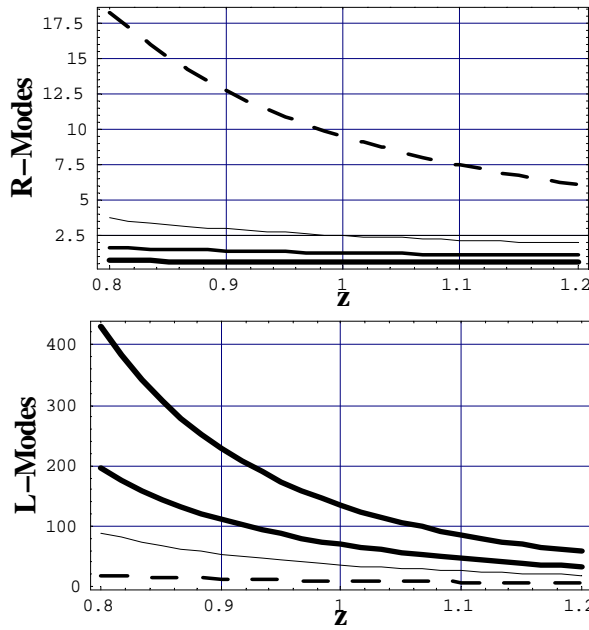


Fig. 6.1 Funcția de undă a fermionilor de chiralitate stângă și dreaptă pe extradimensiune, pentru $b = 0.5$ și $M = \{0, 1, 1.5, 2\}$

Utilizând operatorii de spin, prima ecuație a sistemului (6.20) devine

$$\left[\gamma^i L_i + \frac{3i}{2a} \gamma^4 \gamma^5 + M \right] \Psi = 0, \quad (6.23)$$

obținând pentru câmpurile de masă nule, următoarele combinații liniare [39],

$$\psi_L^{(up)} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right], \quad (6.24)$$

$$\psi_L^{(dn)} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right],$$

respectiv

$$\psi_R^{(dn)} = iC \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right], \quad (6.25)$$

$$\psi_R^{(up)} = -iC \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2\theta)^{-3/4} \exp\left[-i\frac{3}{4}(\alpha + \beta)\right].$$

Așadar, utilizarea metodelor din teoria grupurilor, ne permite obținerea funcțiilor de undă ale fermionilor de chiralitate stângă și dreaptă pe membrana $S^3 \times R$, observându-se că modurile de chiralitate stângă (spre deosebire de cele de chiralitate dreaptă) sunt confinate pe membrana 4-dimensională.

CONCLUZII

Rezultatelor teoretice prezentate în capitolele anterioare conduc la următoarele concluzii:

1. Într-o primă etapă, s-a urmărit însușirea unui aparat matematic general aplicabil în teoriile cuantice de câmp și fizica gravitației. Astfel, în cadrul modelelor speciale în dinamica neliniară, atenția a fost focalizată asupra sistemului Lotka-Volterra. Studiul proprietăților fazice și de invarianță ale acestuia, evidențiază în cadrul competiției liniare evoluția speciilor x sau y ca fiind una periodică. În cadrul *competiției neliniare*, una dintre specii poate în timp să scadă sau să crească până la o valoare staționară, pentru diferite valori ale parametrilor ce intervin în ecuații, obținându-se comportări distincte ale speciilor [86]. Portretul fazelor prezintă diverse configurații; traiectorii închise pentru cazul liniar, noduri stabile și instabile, puncte șea pentru cazul neliniar.

2. În cadrul unui formalism unitar de covarianță, aplicație la interacțiunile fundamentale, am dezvoltat o analiză la temperatură finită a dinamicii unui câmp scalar ce evoluează într-un câmp electric static, perpendicular pe un câmp magnetic [84]. Cu ajutorul funcției caracteristice, sunt deduse potențialele termodinamice, ecuația de stare și presiunea, ca funcții de temperatură și de inducția câmpului magnetic.

3. Utilizarea formalismul Cartan din geometria diferențială în exprimare liberă de coordonate conduce la determinarea, pentru clasa metricilor statice cu simetrie sferică, a componentelor esențiale ale tensorului Einstein în reperul tetradic pseudo-ortonormal considerat [85]. Aplicarea acestuia la cazul structurilor spațio-temporale vide și respectiv susținute de un câmp electrostatic sferic simetric conduce, prin integrarea ecuațiilor Einstein, într-o manieră unitară, la soluțiile exacte de interes fizic Schwarzschild și respectiv Reissner-Nordström.

4. După aplicarea formalismului Cartan la metricile consacrate de tip Robertson-Walker, s-a trecut la modele de univers închis cu constantă cosmologică. Aici, am studiat universul dominat de radiație, respectiv materie, prin prisma ecuațiilor Einstein, și a unei mărimi scalare, cu rol de integrală primă, dependentă de parametrul Hubble și de constanta cosmologică. Axându-ne asupra prafului cosmologic și a radiației de echilibru, am observat că, la un moment dat din trecut, în istoria universului, cantitatea respectivă, corespunzătoare radiației termalizate este comparabilă cu cea a prafului cosmologic [101], moment caracteristic în teoriile Big-Bang și denumit epoca de recombinare (era decuplării).

5. Utilizând același formalism, am trecut la cosmologiile RW neomogene și am analizat metrica Starobinsky care reprezintă baza geometrodinamică a generalizării modelului inflaționist, în vederea înțelegerii formării structurilor.

6. Deoarece observațiile recente WMAP la scara megastructurilor au evidențiat necesitatea unei perioade inflaționiste în evoluția universului, am fost interesați de procesele creării de particule într-un univers quasi-de Sitter, acesta stând la baza formării fluctuațiilor responsabile de formarea structurilor. Plecând de la ecuația Gordon, scrisă ca o superpoziție de moduri ortonormale, am calculat densitatea de particule, respectiv energia corespunzătoare acestora, pentru o primă formă a funcțiilor Henkel [32]. Ca rezultate importante, au fost obținute: tipul clasic de fluctuații $\delta\Phi = \frac{H}{2\pi}$ și densitatea de energie a materiei create.

7. Utilizând setul complet ortonormal al funcțiilor Henkel, am determinat densitatea de particule create și densitatea de energie corespunzătoare, compusă de această dată, din factori aferenți unui termen cosmologic, unei radiații întunecate, prafului exotic și radiației termalizate, identificându-se și forma presiunii implicate [102].

8. Analogia dintre interiorul găurii negre și spațiul de Sitter permite un studiu asimptotic al factorului de scală, evidențiindu-se stadiul radiației

dominante în univers, precum și expansiunea accelerată a universului [102]. Evoluția factorului de scală în raport cu timpul cosmic confirmă o perioadă „îndelungată” care sugerează conexiunea dintre fluctuațiile coerente massless și contribuția termenului curburii.

9. În expresia densității energetice, găsim un termen cosmologic, care poate explica expansiunea accelerată post-inflaționistă a universului observabil, un termen pozitiv al curburii, care poate indica faptul că trăim univers închis topologic, un praf „exotic” legat de materia barionică lipsă din univers, și nu mai puțin important un termen al radiației termalizate, care poate fi necesar procesului de reîncălzire (după stadiul inflației haotice) [102]. Studiul relevă o eră dominantă a radiației, urmată de un amestec de fluctuații coerente ale unui câmp massless, finalizată cu o expansiune accelerată a universului. Rezultate asemănătoare au fost obținute de profesorul Hsu în 2009.

10. Existența, fie și teoretic, a unor obiecte astrofizice exotice: stele bozonice, găuri de cârțiță, defecte topologice și singularități dezgolite, ne-au determinat să investigăm structuri spațio-temporale global patologice, aparținând clasei Bianchi VIII. Analiza sursei materiale care să susțină o geometrie impusă de metrica cu $g_{44} = -ch^2(az)$, precum și identificarea geodezicelor timelike prin intermediul ecuațiilor Euler-Lagrange, pun în evidență că o particulă test va parcurge întreaga sa geodezică, într-un timp propriu finit, fiind împrizonierată între două momente de timp universale [103].

11. Pentru un câmp scalar complex descris de ecuația Gordon, pe varietatea spațio-temporală cu metrică de tip hiperbolic cu $g_{44} = -ch^2(az)$, determinăm setul complet de moduri ale câmpului de probă [36].

12. Focalizându-ne asupra bozonilor de masă nulă într-o analiză termodinamică, calculăm funcția de partiție uni-particulă, expresia energiei libere și a entropiei per particulă, observând că aceasta nu vine în contradicție cu teorema lui Nerts [37]. Pentru temperaturi înalte, acestea aproximează expresiile cunoscute din termodinamica clasică.

13. Pornind de la aceeași metrică de tip hiperbolic, scriem ecuația Gauss-Poisson generalizată sub forma unei ecuații de vectori și valori proprii pentru operatorul Laplace pe spațiu-timpul considerat. Compararea formei obținute cu cea a funcțiilor hipergeometrice, permite determinarea expresiei generale a potențialului electrostatic [103], pentru orice densitate de sarcină dată.

14. Investigațiile moderne în domeniul limită de energie joasă a teoriei M au condus la apariția modelelor de multivers cu dimensiuni suplimentare. Acestea fiind sistematizate în cadrul modelelor de membrană cosmologică. Pentru studiul bozonilor masivi într-un spațiu 5-dimensional, am presupus membrana 4D fiind însuși spațiu-timpul $S^3 \times R$, iar prin intermediul formalismului Cartan, și a ecuațiilor Einstein având ca sursă un fluid perfect, am determinat expresia factorului *warp* (de deformare după a 5-a dimensiune) [38].

15. Dinamica 5d a unui câmp scalar real cuplat cu gravitația a fost studiată prin prisma ecuației Gordon în hyperspațiu (bulk), rezolvarea acesteia conducând la spectrul maselor particulelor [38], generalizând expresiile din literatură.

16. În cazul fermionilor cuplați minimal la un spațiu 5-dimensional, având drept membrane 4-dimensionale spațiu-timpul $S^3 \times R$ obținem funcțiile de undă ale fermionilor de chiralitate stângă și dreaptă, pe extradimensiune [39], fiind dedus setul complet al soluțiilor în formă închisă pentru ecuația Dirac pe topologia $S^3 \times R$, observându-se că fermionii left sunt confinați pe membrana $S^3 \times R$. Acest mecanism a fost investigat în literatura de specialitate doar pentru membrane de tip Minkowski.

Bibliografie selectivă

- [1] I. Aștefanoaei, C. Dariescu, M.A. Dariescu, *Modele speciale de Univers și patologii spațio-temporale*, Editura Universității “Alexandru Ioan Cuza” Iași, 2007
- [2] M. Banados et al, *Geometry of the 2+1 black hole*, Phys. Rev. D 48, 1506-1525, 1993
- [4] B.A. Bassett, C. Dariescu, M.A. Dariescu, B. Gumjudpai, *Proceedings from The First Poe School on Cosmology: Introductory Cosmology*, Thailand, 2002
- [5] D. Bazeia, F.A. Brito, L. Losano, *Scalar fields, bent branes, and RG flow*, JHEP 0611:064, 2006
- [8] V.B. Bezerra et al, *Some remarks on topological defects and their gravitational consequences*, Int. J. Mod. Phys. A17, 4365-4374, 2002
- [9] N.D. Birell, P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1982
- [13] C. Brans, R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. 124, 925-935, 1961
- [20] da Cruz Wellington, *The Hausdorff dimension of fractal sets and fractional quantum Hall effect*, Chaos, Solitons & Fractals, 17, 975-979, 2003
- [21] C. Dariescu, M.A. Dariescu, *U(1) gauge theory of the quantum Hall effect*, Found Phys, 21, 1329-1333, 1991
- [23] C. Dariescu, M.A. Dariescu, *Gravitație și câmpuri în Universul Einstein*, Editura Vesper, 1997
- [25] C. Dariescu, M.A. Dariescu, *Large-scale pathology of universe with VII₀ x VIII isometries*, Found. Phys. Lett. 13, 147-165, 2000
- [26] C. Dariescu, M. A. Dariescu, *Large scale pathology and gravitomagnetic resonances in static VII₀xVIII₀ space-times with mixed matter sources*, Int. J. Mod. Phys. A 16, 3707-3716, 2001
- [32] Ciprian Dariescu, **Ana-Camelia Pîrghie**, *The Bogolubov coefficient and particle creation during the quasi-de Sitter stage of the Universe*, Buletinul Institutului Politehnic Iași, Tomul LIV (LVIII), Fasc. 3, pp. 79- 88, secția Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică, 2008
- [34] M.A. Dariescu, C. Dariescu, *Finite temperature analysis of quantum Hall-type behavior of charged bosons*, Chaos, Solitons & Fractals, 33, No. 3, 776-781, 2007
- [36] Marina-.Aura Dariescu, Ciprian Dariescu, **Ana-Camelia Pîrghie**, *Thermodynamics of bosons in an universe with global pathology*, Romanian Reports in Physics, Vol. 61, Number 3, 417-426, 2009
- [37] Marina-Aura Dariescu, Ciprian Dariescu, **Ana-Camelia Pîrghie**, *Quantum thermodynamics of massless bosons in universes with VII₀xVIII₀ isometries*, International Journal of Modern Physics A,

- Vol. 24, Issues 8-9, 1574-1577, 2009
- [38] Marina-Aura Dariescu, Ciprian Dariescu, **Ana-Camelia Pîrghie**, *Mass spectrum în 5D Einstein Universe and El Naschie's quantum golden field theory*, *Chaos, Solitons and Fractals* 42,247-252, 2009
- [39] Marina-Aura Dariescu, Ciprian Dariescu, **Ana-Camelia Pîrghie**, *Fermions on 5D warp of Einstein Universe*, *Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul LV (LIX), Fasc. 1*, pp. 45- 52, secția Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică, 2009
- [40] F. Dahia, C. Romero, *Confinement and stability of the motion of test particles in thick branes*, *Phys. Lett. B* 651, 232-238, 2007
- [45] H.P. De Oliveira, *Density perturbations in warm inflation and COBE normalization*, *Phys. Lett. B* 526, 1-11, 2002
- [46] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, *Phys Rev D* 62, 046008, 2000
- [52] M. Gogberashvili, *Four Dimensionality in Non-compact Kaluza-Klein Model*, *Mod. Phys. Lett. A* 14, 2025-2031, 1999
- [53] S. Gottlober, H.J. Haubold, J.P. Muckel. V. Muller, *Early Evolution of the Universe and Formation of Structure*, Akademie-Verlag Berlin, 1990
- [54] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 4th edn Academic, New York, 1965
- [64] S. W. Hawking, *Universul într-o coajă de nucă*, Editura Humanitas București, 2006
- [65] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge university press, 1973
- [66] P. Horava, *M theory as a holographic field theory*, *Phys. Rev. D* 59, 046004, 1999
- [74] R. Koley, S. Kar, *Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes*, *Class. Quant. Grav.* 22, 753-768, 2005
- [75] C. Kounnas, A. Masiero, D.V. Nanopoulos, K.A. Olive, *Cosmology and GUT's in Grand Unification with and without Supersymmetry and Cosmological Implication*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984
- [76] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980
- [81] A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Acad Publ, Chur, Switzerland, 1990
- [82] A.D. Linde, *Inflation and String Cosmology*, arXiv:hep-th/0503195v1, 2005
- [84] **A. C. Lohan**, M. A. Dariescu, C. Dariescu, *Field thermodynamics in Quantum Hall Effect*, *Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul LIV (LVIII), Fasc. 1*, pag. 83-90, secția Matematică.

- Mecanică Teoretică. Fizică, 2008
- [85] **Ana-Camelia Lohan**, Ciprian Dariescu, *Applied geometry of gauge-invariance to some physically important metrics*, Analele Științifice ale Universității „Al.I.Cuza” din Iași, Tom LIII-LIV, pag 42-50, 2007-2008
- [86] **Ana-Camelia Lohan**, Margareta Ignat, *Numerical simulation for the non-linear Lotka-Volterra system*, Rom. Journ. Phys., Vol. 52. Nos. 3-4, P. 207-214, Bucharest, 2007
- [92] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman and company San Francisco, 1972
- [101] **Ana-Camelia Pîrghie**, *On the cosmological prime integral of Einstein's field equations for Λ - closed universe models*, Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Tomul LV (LIX), Fasc. 4, pag. 53-64, Secția Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică, 2009
- [102] **Ana-Camelia Pîrghie**, Ciprian Dariescu, Marina-Aura Dariescu, *Hawking-de Sitter Thermalization of Quasi-Minkowskian Massless Scalaron Production, Energy Density Content and Back-Reaction*, International Journal of Theoretical Physics, Vol. 49, Number 1, 98-109, 2010
- [103] **Ana-Camelia Pîrghie**, Ciprian Dariescu, Marina-Aura Dariescu, *Various electrostatic field configuration on a globally pathologic metric*, Analele Științifice ale Universității “Al. I. Cuza” Iași, Tom LIII-LIV, pag. 93-103, 2007-2008
- [123] A. Vilenkin, E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994
- [125] A. Wang, P.S. Letelier, *Domain wall spacetimes: Instability of cosmological event and Cauchy horizons*, Phys. Rev. D 52, 1800-1807, 1995
- [127] E.L. Wright, *COBE Observations of the Cosmic Infrared Background*, New Astron. Rev. 48, 465-468, 2004